ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1 (задачи 1–10). Даны вершины треугольника $A(12; -5)$, $B(0; 5)$, $C(-12; -11)$. Найти: 1) длину стороны BC; 2) уравнение линии BC; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины A; 4) длину высоты, проведенной из вершины A; 5) площадь треугольника ABC; 6) угол B в радианах с точностью до двух знаков.

Решение. 1 Расстояние d между точками $B(x_1;y_1)$ и $C(x_2;y_2)$ плоскости определяется по формуле $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Применяя ее, находим (рисунок 11):

$$BC=\sqrt{(-12-0)^2+(-11-5)^2}=$$

$$=\sqrt{(-12)^2+(-16)^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20.$$

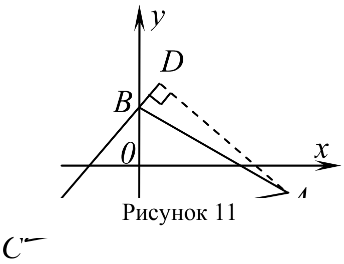


Рисунок 11

2 Сторона BC проходит через две точки, поэтому воспользуемся уравнением прямой $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$:

$$\frac{y-5}{-11-5}=\frac{x-0}{-12-0};\ -12y+60=-16x;\ 16x-12y+60=0;$$

$4x - 3y + 15 = 0$ – уравнение BC.

3 Чтобы составить уравнение высоты AD, проведенной из вершины A на сторону BC, необходимо знать угловой коэффициент этой высоты, который определим с помощью соотношения $k_{BC}k_{AD}=-1$.

$$k_{BC}=-\frac{4}{-3}=\frac{4}{3};\ k_{AD}=-\frac{3}{4}.$$

Составляем уравнение высоты AD, используя уравнение

$$y-y_A=k_{AD}\,(x-x_A);$$

$$y-(-5)=-\frac{3}{4}(x-12);\ (y+5)\cdot 4=-3(x-12);$$

$$4y+20=-3x+36;\ 3x+4y-16=0.$$

4 Для определения длины высоты AD воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой:

$$|AD|=\left|\frac{4\cdot 12-3\cdot(-5)+15}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{48+15+15}{5}\right|=\left|\frac{78}{5}\right|=15{,}6.$$

5 Для вычисления площади треугольника ABC используем формулу

$$S=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)],\text{ т. е.}$$

$$S=\frac{1}{2}[12(5+11)+0\cdot(-11+5)+(-12)\cdot(-5-5)]=156\text{ ед}^2.$$

Но площадь треугольника ABC в данном случае можно было найти так;

$$S=\frac{1}{2}CB\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15{,}6=156\text{ ед}^2.$$

6 Чтобы определить угол B, необходимо знать угловые коэффициенты сторон BC и BA, которые образуют этот угол:

$$k_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-11-5}{-12-0}=\frac{-16}{-12}=\frac{4}{3};$$

$$k_{BA}=\frac{-5-5}{12-0}=-\frac{10}{12}=-\frac{5}{6}.$$

Используем формулу угла между прямыми, отсчитывая его против хода часовой стрелки (наличие чертежа, выполненного с учетом координат вершин, позволяет найти внутренний угол B):

$$\mathrm{tg}\angle CBA=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}=\frac{-5/6-4/3}{1+(4/3)(-5/6)}=\frac{-13/6}{-1/9}=19{,}5;$$

$$\angle CBA=\mathrm{arctg}\,19{,}5\approx 1{,}5021\approx 1{,}50\text{ рад.}$$

Пример 2 (задачи 11–20). Даны две смежные вершины $A(2;5)$ и $B(5;3)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(-2;0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

Решение. Для вершины A (рисунок 12) противоположной является вершина C, для B – вершина D. Точка M делит отрезки AC и BD пополам. Поэтому координаты точек C и D можно найти, воспользовавшись формулами деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

С одной стороны, из равенства $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ получим:

$$-2 = \frac{2 + x_C}{2}; \ -4 = 2 + x_C, \text{ откуда}$$

$$x_C = -6, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}; \ 0 = \frac{5 + y_C}{2}; \ y_C = -5 \text{ и } C(-6;-5).$$

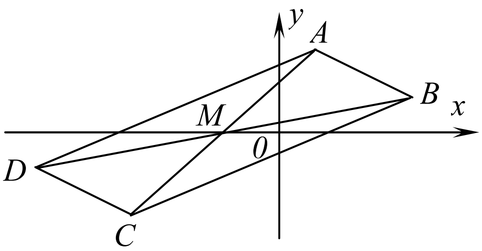


Рисунок 12

С другой стороны,

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2}; \ -2 = \frac{5 + x_D}{2};$$

$$-4 = 5 + x_D; \ x_D = -9.$$

$y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2}$, откуда $0 = \dfrac{3 + y_D}{2}$; $y_D = -3$; $D(-9;-3)$. Зная теперь все вершины параллелограмма и воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, можем составить уравнения сторон параллелограмма.

Уравнение AB: $\dfrac{y-3}{5-3} = \dfrac{x-5}{2-5}$, $2x + 3y - 19 = 0$.

Уравнение BC: $\dfrac{y+5}{3+5} = \dfrac{x+6}{5+6}$, $8x - 11y - 7 = 0$.

Уравнение CD: $\dfrac{y+5}{-3+5} = \dfrac{x+6}{-9+6}$, $2x + 3y + 27 = 0$.

Уравнение AD: $\dfrac{y-5}{-3-5} = \dfrac{x-2}{-9-2}$, $8x - 11y + 39 = 0$.

Пример 3 (задачи 21–30). Составить уравнение линии – геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $A(8;0)$ и до прямой $x = 12{,}5$ равно числу 4/5. Полученное уравнение привести к простейшему виду.

Решение. Пусть $M(x;\, y)$ – произвольная точка искомой линии. Опустим перпендикуляр MB на данную прямую $x = 12{,}5$ и определим координаты точки B. Очевидно, ордината точки B равна ординате точки M, а абсцисса точки B равна 12,5, т. е. $B(12{,}5;\, y)$. По условию задачи $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{4}{5}$ (рисунок 13). Следовательно,

$$\frac{\sqrt{(x-8)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x-12{,}5)^2+(y-y)^2}}=\frac{4}{5}, \text{ или}$$

$$\frac{x^2-16x+64+y^2}{x^2-25x+156{,}25}=\frac{16}{25},$$

$$9x^2+25y^2=900, \quad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

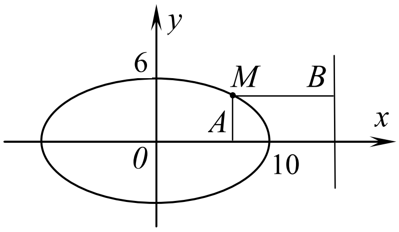


Рисунок 13

Полученное уравнение представляет собой уравнение эллипса, полуоси которого $a = 10$ и $b = 6$. Как видно, данная точка $A(8;0)$ является одним из фокусов этого эллипса.

Пример 4 (задачи 31–40). Линия задана уравнением $r = \dfrac{10}{2+\cos\varphi}$. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, придавая φ значения через промежуток $\pi/8$;

2) найти уравнение данной линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

Решение. 1 Построим линию по точкам, предварительно заполнив таблицу значений r и φ. Используя данные таблицы, строим линию в промежутке от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ так, как показано на рисунке 14. Для построения линии в нижней полуплоскости, т. е. в промежутке от $\varphi = \pi$ до $\varphi = 2\pi$, используем свойство симметрии графика функции относительно полярной оси (т. к. $r(-\varphi) = r(\varphi)$).

Номер	φ	$\cos\varphi$	$2+\cos\varphi$	$r=10/(2+\cos\varphi)$
1	0	1,000	3,000	3,333
2	$\pi/8$	0,924	2,924	3,420
3	$\pi/4$	0,707	2,707	3,694
4	$3\pi/8$	0,383	2,383	4,197
5	$\pi/2$	0,000	2,000	5,000
6	$5\pi/8$	–0,383	1,617	6,183
7	$3\pi/4$	–0,707	1,293	7,734
8	$7\pi/8$	–0,924	1,076	9,293
9	π	–1,000	1,000	10,000

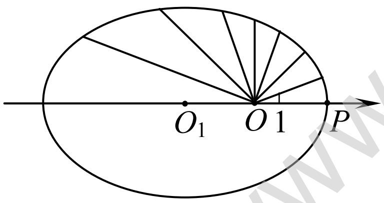


Рисунок 14

2 Перейдем в заданном уравнении линии $r = \dfrac{10}{2+\cos\varphi}$ от полярных координат к декартовым, используя формулы перехода $r=\sqrt{x^2+y^2}$,

$r\cos\varphi = x$, $\; r\sin\varphi = y$:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{10}{2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Преобразуем это соотношение:

$$2\sqrt{x^2+y^2}+x=10,\ 2\sqrt{x^2+y^2}=10-x,\ 4(x^2+y^2)=(10-x)^2,$$

$$4x^2+4y^2=100-20x+x^2,\ 3x^2+20x+4y^2-100=0.$$

Выделив полный квадрат по переменным x и y, получим:

$$3\left(x^2+2\cdot\frac{10}{3}x+\left(\frac{10}{3}\right)^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2\right)+4y^2=100,$$

$$3\left(x+\frac{10}{3}\right)^2+4y^2=100+\frac{100}{3};\ 3\left(x+\frac{10}{3}\right)^2+4y^2=\frac{400}{3}.$$

Разделим обе части равенства на $\dfrac{400}{3}$:

$$\frac{\left(x+\frac{10}{3}\right)^2}{\frac{400}{9}}+\frac{y^2}{\frac{100}{3}}=1,\quad \frac{\left(x+\frac{10}{3}\right)^2}{\left(\frac{20}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2}=1.$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $O_1\left(-\frac{10}{3};0\right)$ и полуосями $a=\frac{20}{3}$, $b=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Пример 5 (задачи 41–50). Дана пирамида с вершинами в точках $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(7; 6; 3)$, $D(4; -3; -1)$. Найти: 1) длину ребер $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; 2) площадь грани ABC; 3) угол между ребрами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$; 4) объем пирамиды; 5) длину высоты, опущенной на грань ABC.

Решение. 1 Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}=(-2-1)\cdot\vec{i}+(4-2)\cdot\vec{j}+(-3+1)\cdot\vec{k}=-3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k};$$

$$\overrightarrow{AC}=(7-1)\cdot\vec{i}+(6-2)\cdot\vec{j}+(3-3)\cdot\vec{k}=6\vec{i}+4\vec{j};$$

$$\overrightarrow{AD}=(4-1)\cdot\vec{i}+(-3-2)\cdot\vec{j}+(-1-3)\cdot\vec{k}=3\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}.$$

Найдем длины этих векторов:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13};$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{3^2+(-5)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+25+16}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

2 Площадь грани ABC будет равна половине модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, на которых построена грань:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|8\vec{i}-12\vec{j}-24\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+12^2+(-24)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{64+144+576}=\frac{1}{2}\sqrt{784}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 28=14\text{ ед.}^2$$

3 Угол между ребрами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдем по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{3\cdot 6+(-5)\cdot 4-4\cdot 0}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}}=\frac{18-20}{10\sqrt{26}}=\frac{-1}{5\sqrt{26}}.$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right)\approx\arccos(-0{,}039)\approx 1{,}61\text{ рад.}$$

4 Объем пирамиды равен шестой части абсолютного значения смешанного произведения векторов, исходящих из одной вершины пирамиды, например, из вершины A:

$$V=\operatorname{mod}\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right).$$

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\\ 3 & -5 & -4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left((-3)\cdot(-16)-2\cdot(-24)-2\cdot(-42)\right)=\frac{1}{6}\cdot 180.$$

Итак, $V=30$ ед^3.

5 Длину высоты h, опущенной на грань ABC, можно найти, исходя из формулы $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} h$, откуда $h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 30}{14} = \frac{3 \cdot 15}{7} = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$ ед. длины. Можно было искать h как расстояние от точки B до плоскости ABC.

Пример 6 (задачи 51–60). Дана система $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить двумя способами: 1) по формулам Крамера; 2) средствами матричного исчисления.

Решение 1 Проверим совместность системы, найдя ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель разложением его по элементам первой строки:

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= (-6+5) + 4 \cdot (-18-3) - 2 \cdot (-15-3) = -1 - 84 + 36 = -49.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то заданная система уравнений совместна и имеет единственное решение. Для этого вычислим определители Δ_j, получающиеся из определителя системы Δ путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при x_j, столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -1 \cdot \left(1(-6) - (-5) \cdot 1\right) + 4 \cdot \left(2 \cdot (-6) - (-3) \cdot 1\right) -$$
$$-2 \cdot \left(2 \cdot (-5) - (-3) \cdot 1\right) = -1 \cdot (-6+5) + 4 \cdot (-12+3) - 2 \cdot (-10+3) =$$
$$= 1 - 36 + 14 = -21;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-12+3) + 1 \cdot (-18-3) - 2 \cdot (-9-6) = -30 + 30 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3+10) + 4 \cdot (-9-6) - 1 \cdot (-15-3) = -35.$$

Отсюда, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{7}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{7}$.

2 Найдем алгебраические дополнения элементов определителя матрицы системы:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -1$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 21$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -14$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$;

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-18;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-7;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=13.$$

Составляем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-1 & -14 & -2\\ 21 & 0 & -7\\ -18 & -7 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{49} & \frac{2}{7} & \frac{2}{49}\\ -\frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7}\\ \frac{18}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{49}\end{pmatrix}.$$

Найдем теперь решение заданной системы из равенства:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{49} & \frac{2}{7} & \frac{2}{49}\\ -\frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7}\\ \frac{18}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{49}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{49}+ & \frac{4}{7}- & \frac{6}{49}\\ +\frac{3}{7}+ & 0- & \frac{3}{7}\\ -\frac{18}{49}+ & \frac{2}{7}+ & \frac{39}{49}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\ 0\\ \frac{5}{7}\end{pmatrix}, \text{ отсюда, } x_1=\frac{3}{7},\ x_2=0,\ x_3=\frac{5}{7}.$$

Пример 7 (задачи 81–90). Решить уравнение $z^3+27i=0$.

Решение. Имеем $z=\sqrt[3]{-27i}$. Представим число $z_1=-27i$ в показательной форме $|z_1|=27$, $\arg z_1=-\frac{p}{2}$, $z_1=27e^{-i\cdot\frac{p}{2}}$. Тогда $z_k=\sqrt[3]{27}\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{-p}{2}+2kp}{3}}$, где $k = 0, 1, 2$.

$$z_0=3e^{-i\cdot\frac{p}{6}}=3\left(\cos\left(-\frac{p}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{p}{6}\right)\right)=3\left(\cos\frac{p}{6}-i\sin\frac{p}{6}\right)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right),\ z_1=3e^{i\cdot\frac{p}{2}}=3\left(\cos\frac{p}{2}+i\sin\frac{p}{2}\right)=3i,$$

$$z_2=3e^{i\cdot\frac{7}{6}p}=3\left(\cos\frac{7}{6}p+i\sin\frac{7}{6}p\right)=3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right).$$

Пример 8 (задачи 91–100). Даны комплексные числа $z_0 = = 290$; $z_1 = 30 - i\cdot 95$; $z_3 = 30 + i\cdot 45$; $z_4 = -25 + i\cdot 1$. Вычислить $z=\frac{z_0}{z_1+z_2}$, где $z_2=\frac{z_3z_4}{z_3+z_4}$

*Решение****.*** Находим $z_3 + z_4 = 30 + + i\cdot 45 + (-25) + i\cdot 1 = 5 + i\cdot 46$.

Переведем это число в показательную форму

$z_3 + z_4 =$

$=\sqrt{5^2+46^2}\cdot e^{i\cdot\mathrm{arctg}\frac{46}{5}}\approx\sqrt{2141}\cdot e^{i\cdot 83{,}8^{\circ}}$. Переводим z_3 и z_4 в показательную форму:

$$z_3=\sqrt{30^2+45^2}\cdot e^{i\cdot\mathrm{arctg}\frac{45}{30}}\approx 54{,}08e^{i\cdot 56{,}3^{\circ}}.$$

$$z_4=\sqrt{(-25)^2+1^2}\cdot e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{25}\right)}\approx 25{,}02e^{i\left(180^{\circ}-\mathrm{arctg}\,0{,}04\right)}\approx 25{,}02e^{i\cdot 177{,}7^{\circ}}$$

($\varphi=\arg z_4=\mathrm{arctg}\left(-\frac{y}{x}\right)=p-\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, рисунок 15).

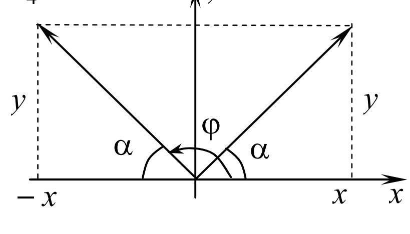


Рисунок 15

Перемножаем:

$$z_3z_4 \approx (54{,}08 \cdot 25{,}02) \cdot e^{i(56{,}3^\circ + 177{,}7^\circ)} \approx 1353{,}08\, e^{i\cdot 234^\circ}.$$

Получаем: $z_2 \approx \dfrac{1353{,}08e^{i\cdot 234^\circ}}{46{,}27e^{i\cdot 83{,}8^\circ}} \approx 29{,}24e^{i\cdot 150{,}2^\circ} \approx -25{,}37 + 14{,}53i$.

$$z_1 + z_2 = 30 - i\cdot 95 - 25{,}37 + i\cdot 14{,}53 = 4{,}63 - i\cdot 80{,}47 =$$

$= \sqrt{4{,}63^2 + 80{,}47^2} \cdot e^{i\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{80{,}47}{4{,}63}\right)} \approx 80{,}6e^{i\left(-86{,}7^\circ\right)}$ (число $z_1 + z_2$ располагается в IV четверти).

Итак, $z = \dfrac{220e^{i\cdot 0}}{80{,}6e^{i\cdot\left(-86{,}7^\circ\right)}} \approx 2{,}73e^{i\cdot 86{,}7^\circ} \approx 0{,}16 + 2{,}72i$.

Пример 9 (задачи 121–130). Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x + 2}{x^2 - x + 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x + 2}{x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \infty$.

Пример 10 (задачи 121–130). Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Решение. Имеет место неопределенность 0/0, причем числитель содержит иррациональность. Надо преобразовать дробь так, чтобы в числителе выделился множитель x. С этой целью перенесем иррациональность в знаменатель, умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, т. е. $\sqrt{1+x} + 1$. Будем иметь:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 1}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Пример 11 (задачи 121–130). Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Выполним очевидные здесь преобразования:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}.$$

Если ввести новую переменную $y = \dfrac{x}{2}$, $y \to \infty$ при $x \to \infty$, то воспользовавшись вторым замечательным пределом, получим:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y\cdot 2} = \left(\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^2 = e^2.$$

Последний переход можно объяснить двумя обстоятельствами: во-первых, при возведении степени в степень показатели перемножаются; во-вторых, $\lim\limits_{x\to a} \left(f\left(x\right)\right)^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)\right)^n$.

Пример 12 (задачи 121–130). Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 + 3x\right)}{\sin 4x}$.

Решение. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби есть функции бесконечно малые. Пользуясь эквивалентностью бесконечно малых, из утверждения $\ln(1 + 3x) \sim 3x$ при $x \to 0$ и из утверждения $\sin 4x \sim 4x$ получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Пример 13 (задачи 141–150). Дана функция:

$$f(x)=\begin{cases} 2x, \text{если } -\infty < x \le 1; \\ 4-2x, \text{если } 1 < x < 3 \\ \dfrac{x^2}{3}+2, \text{если } 3 \le x < +\infty \end{cases}$$

Найти точки разрыва, если они существуют; найти скачок функции в каждой точке разрыва и построить график.

Решение. График функции приведен на рисунке 16. Функция задана на трех промежутках различными аналитическими выражениями. Каждое из этих выражений представляет собой элементарную функцию, которая является непрерывной. Поэтому функция может иметь разрывы лишь в точках, где меняется ее аналитическое выражение. Исследуем функцию на непрерывность в каждой из этих точек.

1) $x = 1$, находим $f(1) = (2x)_{x=1} = 2$;

2) находим односторонние пределы $f(x)$ при стремлении x к 1 слева и справа. При $x \le 1$ функция $f(x) = 2x$, следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} 2x = 2.$$

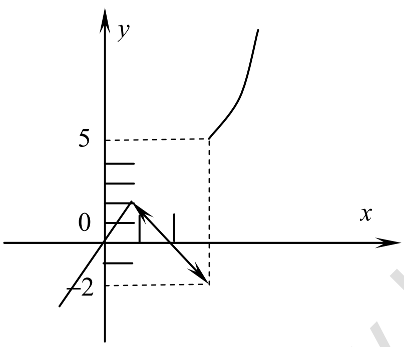


Рисунок 16

При $3 > x > 1$ функция $f(x)$ задана выражением $f(x) = 4 - 2x$, следовательно,

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(4-2x)=2;$$

3) таким образом, односторонние пределы в точке $x = 1$ равны между собой и равны значению функции в точке $x = 1$, т. е.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(4-2x)=-2.$$

Значит, в точке $x = 1$ функция непрерывна. Рассмотрим точку $x = 3$: $\quad f(3)=\left(\dfrac{x^2}{3}+2\right)_{x=3}=3+2=5;$

при $1 < x < 3$ имеем $f(x) = 4 - 2x$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}(4-2x)=-2$, а при $x \ge 3$ имеем $f(x)=\dfrac{x^2}{3}+2$,

следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}\left(\dfrac{x^2}{3}+2\right)=5$.

Мы получили, что в точке $x = 3$ левый и правый пределы функции $f(x)$ конечны, но не одинаковы, значит в точке $x = 3$ имеет место разрыв первого рода. Скачок в точке разрыва:

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)-\lim_{x\to 3-0} f(x)=5-(-2)=7.$$

Пример 14 (задачи 161–170). Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = (x^2 + 1)^{2x}$.

Решение. 1 Логарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y = 2x \ln(x^2 + 1).$$

2 Дифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\ln(x^2+1) + x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right) = \frac{2(2x^2 + (x^2+1)\ln(x^2+1))}{x^2+1}.$$

3 Находим производную:

$$y' = (x^2+1)^{2x} \cdot \frac{2(2x^2 + (x^2+1)\ln(x^2+1))}{x^2+1} =$$
$$= 2(2x^2 + (x^2+1)\ln(x^2+1))(x^2+1)^{2x-1}.$$

Пример 15 (задачи 161–170). Найти производную y'_x от неявной функции $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения, получаем:

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - 2xe^y - x^2 e^y y' = 0.$$

Решая полученное уравнение как линейное относительно y'_x, находим требуемую производную:

$$y' \frac{1 - x^2 y e^y}{y} = 2xe^y - 3x^2,$$

$$y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2 y e^y}.$$

Пример 16 (задачи 181–190). Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до трех знаков после запятой.

Решение. Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17 = x_1$. За x_o принимаем число, близкое к числу x_1, при котором легко вычисляется $f(x_o)$.

Пусть $x_o = 16$, тогда $f(x_o) = \sqrt[4]{16} = 2$;

$$f'(x_0) = \frac{1}{4} x^{-3/4}\Big|_{x_0=16} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32};\ dx = \Delta x = x_1 - x_o = 1.$$

Подставляя эти значения в формулу

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \text{ получим:}$$

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 2 + \frac{1}{32}\cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031.$$

Пример 17 (задачи 191–200). Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

Решение. 1 Находим критические точки: $y' = 2\cos x - 2\sin 2x$. Если $y' = 0$, то $2\cos x - 2\sin 2x = 0$, $2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$. Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$; если же $1 - 2\sin x = 0$, то $\sin x = 0{,}5$.

Решая это уравнение, получим $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$.

Из всех найденных критических точек только $x = \pi/6$ лежит внутри отрезка $[0; \pi/2]$: $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{3} = 1 + \dfrac{1}{2} = 1{,}5$.

2 Вычислим значения функции на концах отрезка $[0; \pi/2]$:

$$y(0) = 1;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 2 - 1 = 1.$$

3 Сравним полученные значения: наибольшего значения данная функция на отрезке $[0; \pi/2]$ достигает в точке $x = \dfrac{\pi}{6}$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1{,}5$, а наименьшего – в точках $x = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Пример 18 (задачи 201–210) . Найти такой цилиндр, который имел бы наибольший объем при данной полной поверхности S.

Решение. Пусть радиус основания цилиндра равен x, а высота равна y. Тогда $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$, т. е. $y = \dfrac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{S}{x} - 2\pi x\right)$. Объем цилиндра

$$V = V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3 \cdot$$

Заметим, что x может изменяться от 0 до ∞.

Найдем производную $V'(x) = \frac{S}{2} - 3\pi x^2$ и решим уравнение $V'(x) = 0$: $\frac{S}{2} - 3\pi x^2 = 0$, откуда $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ – единственная критическая точка. Исследуем ее на экстремум. Найдем вторую производную: $V'' = -6\pi x$. Так как при $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ выполняется условие $V'' < 0$, то в этой точке – максимум функции. Объем имеет наибольшее значение, причем

$$y = \frac{S - 2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x,$$

т. е. осевое сечение цилиндра должно быть квадратом.

Пример 19 (задачи 211–220). Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Решение. При $x \to 1$ имеем неопределенность 0/0. Применим правило Лопиталя для раскрытия этой неопределенности:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Пример 20 (задачи 221–230). Исследовать методами дифферен-циального исчисления функцию $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

Решение. 1 Областью определения функции служит вся числовая ось, за исключением двух точек $x = \pm\sqrt{3}$, в которых знаменатель функции обращается в нуль. Поэтому

$$D(y) = (-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3};\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ +\infty).$$

Отсюда следует, что график функции будет состоять из трех частей.

2 Функция терпит разрыв в точках $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, так как функция элементарная и в этих точках не определена:

$$\lim_{x\to -\sqrt{3}-0} y = \lim_{x\to -\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to -\sqrt{3}+0} y = \lim_{x\to -\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty.$$

Точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой разрыва II рода.

$$\lim_{x\to \sqrt{3}-0} y = \lim_{x\to \sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to \sqrt{3}+0} y = \lim_{x\to \sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty.$$

Точка $x = \sqrt{3}$ является точкой разрыва II рода.

Полученные пределы одновременно характеризуют поведение функции в окрестности точек разрыва, что учтем при построении графика.

3 Функция нечетная, так как выполняется условие $y(-x) = -y(x)$:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{3 - (-x)^2} = -\frac{x^3}{3 - x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат. Функция не периодическая.

4 Кривая пересекает оси координат в одной точке O(0; 0). В интервалах $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ и $(0;\ \sqrt{3})$ функция положительна, а в интервалах $(-\sqrt{3};\ 0)$ и $(\sqrt{3};\ +\infty)$ – отрицательна.

5 Найдем асимптоты графика функции:

а) так как $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} y=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} y=\infty$, то прямые $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами кривой;

б) уравнения наклонных асимптот ищем в виде $y = kx + b$. Определим значения коэффициентов k и b:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{3}{x^2}-1}=-1\,;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3/x}{3/x^2-1}=0.$$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты $y = -x$.

При $x \to -\infty$ для k и b получаем те же значения.

6 Найдем точки экстремума и интервалы монотонности. Для этого найдем первую производную и критические точки:

$$y'=\frac{3x^2(3-x^2)+2x\cdot x^3}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-3x^2+2x^2)}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}\,.$$

Если $y'= 0$, то $x^2(9-x^2) = 0$ или $x_1 = 0$; $x_2 = -3$; $x_3 = 3$. y' не существует в точках $x_4=-\sqrt{3}$ и $x_5=\sqrt{3}$, но они не являются критическими, так как не принадлежат области определения функции. Составляем следующую таблицу, включающую критические точки и точки разрыва:

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	–	0	+	Не сущ.	+	0	+	Не сущ.	+	0	–
y	↘	4,5 min	↗	Не сущ.	↗	Экстр. нет	↗	Не сущ.	↗	-4,5 max	↘

$$y_{\min}=y(-3)=\frac{(-3)^3}{3-(-3)^2}=\frac{-27}{-6}=4{,}5;$$

$$y_{\max}=y(3)=\frac{3^3}{3-3^2}=\frac{27}{-6}=-4{,}5.$$

7 Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба. Для этого надо знать вторую производную функции

$$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)'=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)\cdot 2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=$$

$$=\frac{54x-12x^3-18x^3+4x^5+36x^3-4x^5}{(3-x^2)^3}=\frac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}.$$

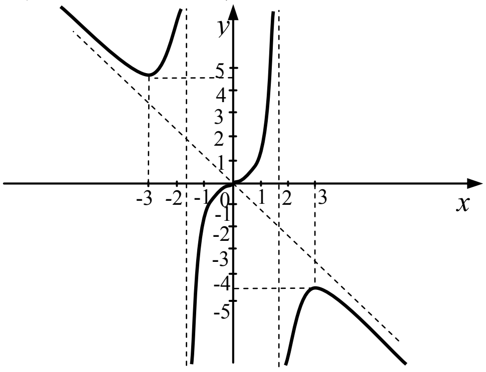
В точках перегиба $y''= 0$ (если $x = 0$) или y'' не существует (если $x=\pm\sqrt{3}$). Последние являются точками разрыва функции, поэтому точкой перегиба может быть только $x = 0$. Составим таблицу:

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
y''	+	Не сущ.	–	0	+	Не сущ.	–
y	$\cup$	Не сущ.	$\cap$	0 перегиб.	$\cup$	Не сущ	$\cap$

$y(0) = 0$; точка $O(0; 0)$ есть точка перегиба.

8. Используя результаты исследования, строим график функции: (рисунок 17).

Пример 21 (задачи 231–240). Отделить действительные корни уравнения $x^3 + 6x + 3 = 0$ и найти



их приближенное значение с точностью до 0,01 ного деления.

Решен ых корней и их отделения применяем

Рисунок 17

реобразуем данное уравнение к виду $x^3 = -6x - 3$ и построим кривые $y = x^3$ и $y = -6x - 3$ в одних и тех же координатах и при одной и той же единице масштаба (рисунок 18).

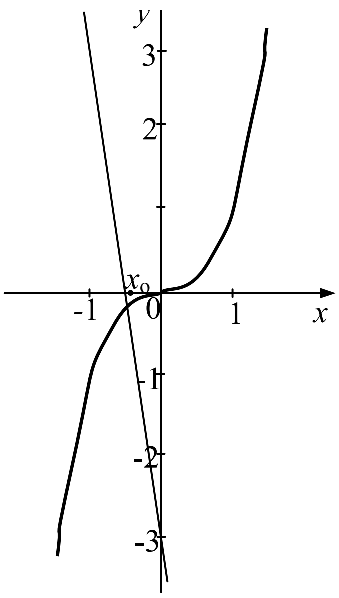


Рисунок 18

Из рисунка заключаем, что данное алгебраическое уравнение имеет только один действительный корень, содер-жащийся на отрезке $[-0,5; -0,4]$.

Проверим правильность отделения корня аналитическим методом. Опре-делим функцию $f(x) = x^3 + 6x + 3$:

$f(-0,5) = (-0,5)^3 + 6(-0,5) + 3 = -0,125$;

$f(-0,4) = (-0,)^3 + 6(-0,4) + 3 = 0,536$.

Итак,

1) $f(-0,5)\cdot f(-0,4) < 0$;

2) $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ в любой точке. Условия 1) и 2) выполнены, следо-вательно, на $[-0,5; -0,4]$ находится единственный корень этого уравнения:

$$c = \frac{(-0,5)+(-0,4)}{2} = -0,45\ ;$$

$$f(c) = (-0,45)^3 + 6(-0,45) + 3 = 0,208 > 0;$$

$$f(a)\cdot f(c) = f(-0,5)\cdot f(-0,45) < 0.$$

Принимаем $a_1 = a = -0,5$, $b_1 = c = -0,45$. Переходим к отрезку $[a_1;b_1] = = [-0,5;-0,45]$.

$$|a_1 - b_1| = |-0,5 + 0,45| = 0,05 > 0,001=\delta.$$

$$c_1 = \frac{(-0,5)+(-0,45)}{2} = -0,475\ ; f(c_1) = (-0,475)^3+6(-0,475)+3=0,043>0;$$

$$f(a_1)\cdot f(c_1) = f(-0,5)\cdot f(-0,75) < 0;\ a_2 = a = -0,5;\ b_2 = c_1 = -0,475;$$

$$[a_2;\ b_2] = [-0,5;\ -0,475];\ |\ a_2 - b_2\ | = |-0,5 + 0,475| = 0,025 > 0,01.$$

$$c_2 = \frac{(-0,5)+(-0,475)}{2} = -0,4875\ ;$$

$$f(c_2) = (-0,4875)^3 + 6(-0,4875) + 3 = -\ 0,041 < 0;$$

$$f(a_2)\cdot f(c_2) = f(-0,5)\cdot f(-0,4875) > 0;\ a_3 = c_2 = -0,4875;\ b_3 = b_2 = -0,475;$$

$$[a_3;\ b_3] = [-0,4875;\ -0,475];\ |\ a_3 - b_3\ | = |-0,4875+0,475| = 0,0125 > 0,01.$$

Взяв $c_3 = \dfrac{-0,4875 - 0,475}{2} = -0,48125$ – середину отрезка $[a_3;\ b_3]$ за приближенное значение корня, допускаем погрешность

$$\Delta = \left|\frac{a_3 - b_3}{2}\right| = \frac{0,00125}{2} < 0,01 = \delta.$$

Ответ: $x_o = -\ 0,48 \pm 0,01$.

Пример 22 (задачи 251–260). Дана функция $z = \ln(x^3 + 3y^2)$. Требуется найти: 1) полный дифференциал; 2) частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 3) показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение. 1 Находим частные производные первого порядка данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln(x^3 + 3y^2)\right)'_x = \frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}.$$

Заметим, что при нахождении $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln(x^3 + 3y^2)\right)'_y = \frac{6y}{x^3 + 3y^2}.$$

В данном случае переменная x принималась за постоянную величину.

По формуле $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ полный дифференциал функции

$$dz = \frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}dx + \frac{6y}{x^3 + 3y^2}dy = \frac{3}{x^3 + 3y^2}(x^2 dx + 2y dy).$$

2 Найдем частные производные второго порядка данной функции как частные производные от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \left(\frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}\right)'_x = \frac{6x(x^3 + 3y^2) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + 3y^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^4 + 18xy^2 - 9x^4}{(x^3 + 3y^2)^2} = \frac{18xy^2 - 3x^4}{(x^3 + 3y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_y = \left(\frac{6y}{x^3 + 3y^2}\right)'_y = \frac{6(x^3 + 3y^2) - 6y \cdot 6y}{(x^3 + 3y^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 + 18y^2 - 36y^2}{(x^3 + 3y^2)^2} = \frac{6x^3 - 18y^2}{(x^3 + 3y^2)^2}.$$

3 Покажем, что смешанные производные равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}\right)'_y = 3x^2 \frac{-6y}{(x^3 + 3y^2)^2} = \frac{-18x^2 y}{(x^3 + 3y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{6y}{x^3 + 3y^2}\right)'_x = 6y \frac{-3x^2}{(x^3 + 3y^2)^2} = \frac{-18x^2 y}{(x^3 + 3y^2)^2}.$$

Видим, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример 23 (задачи 271–280). Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $x \ge 0$, $y \ge 0$, $2x + 3y - 12 \le 0$.

Решение. Сделаем чертеж области D.

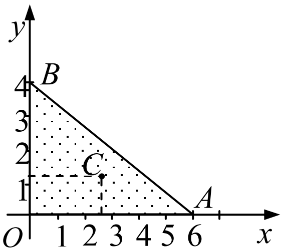


Рисунок 19

1 Найдем стационарные точки, расположенные внутри области D:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y.$$

Составляем систему и решаем ее:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ -x + 2y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ 3y = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{4}{3}, \\ x = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Получили точку $C(8/3; 4/3)$, лежащую внутри области D (рисунок 19).

$$z(C)=z(8/3;4/3)=\left(\frac{8}{3}\right)^2-\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2-4\cdot\frac{8}{3}=\frac{64}{9}-\frac{32}{9}+\frac{16}{9}-\frac{32}{3}=$$

$$=\frac{64-32+16-96}{9}=-\frac{48}{9}=-\frac{16}{3}.$$

2 Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области. Эта задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.

а) на линии OA: $y = 0$; $z(x) = x^2 - 4x$; $x \in [0; 6]$;

$$z'(x) = 2x - 4;\ z'(x) = 0,\ \text{если } x = 2;$$
$$z(2) = 2^2 - 4\cdot 2 = -4 = z(-2; 0);$$
$$z(0) = 0;\ z(6) = 6^2 - 4\cdot 6 = 36 - 24 = 12.$$

На отрезке OA $z_{\text{наиб}} = 12 = z(6; 0)$; $z_{\text{наим}} = -4 = z(2; 0)$;

б) на линии AB: $y=\frac{1}{3}(12-2x)$.

$$z(x)=x^2-x\cdot\frac{1}{3}(12-2x)+(\frac{1}{3}(12-2x))^2-4x=$$

$$=x^2-\frac{12}{3}x+\frac{2}{3}x^2+\frac{144}{9}-\frac{48}{9}x+\frac{4}{9}x^2-4x=$$

$$=\frac{19}{9}x^2-\frac{40}{3}x+16,\ x\in[0,6];$$

$$z'(x)=\frac{38}{9}x-\frac{40}{3};\ z'(x)=0;\ \text{если } x=\frac{60}{19};$$

$$z\left(\frac{60}{19}\right)=\frac{19}{9}\left(\frac{60}{19}\right)^2-\frac{40}{3}\cdot\frac{60}{19}+16=-\frac{96}{19};$$

$$z(0)=16=z(0;4);\ z(6)=\frac{19}{9}\cdot 6^2-\frac{40}{3}\cdot 6+16=12=z(6;0).$$

На линии AB $z_{\text{наиб}} = 16 = z(0; 4)$; $z_{\text{наим}} = -\frac{96}{19}$;

в) на линии OB: $x = 0$; $z(y) = y^2$; $y \in [0; 4]$;

$$z'(y) = 2y;\ z'(y) = 0,\ \text{если } y = 0;$$
$$z(0) = 0 = z(0; 0);\ z(4) = 16 = z(0;4).$$

На линии OB $z_{\text{наиб}} = 16 = z(0; 4)$; $z_{\text{наим}} = 0 = z(0; 0)$.

Из всех найденных значений выбираем самое меньшее и самое большее: $z_{\text{наим}} = -16/3 = z(8/3; 4/3)$, $z_{\text{наиб}} = 16 = z(0; 4)$.

Пример 24 (задачи 291–300). Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице:

x_i	0	1	1,5	2,1	3
y_i	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax + b$, выражающую приближенную функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $y = ax + b$.

Решение. Параметры a и b найдем из системы уравнений и составим таблицу:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{5}x_i+5b=\sum_{i=1}^{5}y_i, \\ a\sum_{i=1}^{5}x_i^2+b\sum_{i=1}^{5}x_i=\sum_{i=1}^{5}x_iy_i. \end{cases}$$

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	0	2,9	0,00	0,00
2	1,0	6,3	1,00	6,30
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21,00
5	3,0	13,2	9,00	39,60
$\sum$	7,6	40,3	16,66	78,75

Составляем систему:

$$\begin{cases} 7{,}6a+5b=40{,}3, \\ 16{,}66a+7{,}6b=78{,}75, \end{cases}$$

решая которую, например, по формулам Крамера, находим $a = 3{,}42$, $b = 2{,}86$. Таким образом, $y = 3{,}42x + 2{,}86$.

Сделаем чертеж (рисунок 20).

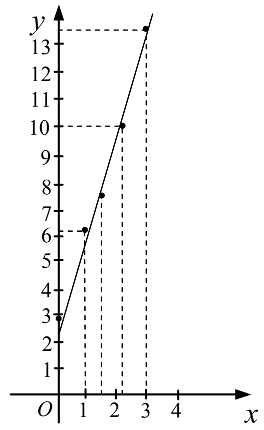


Рисунок 20

Пример 25 (задачи 301–310). Найти интеграл $\int (3\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{x})dx$.

Решение. $\int (3\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{x})dx = \int 3\sqrt{x}dx + \int x^2 dx + \int \frac{2}{x}dx = =$

$$3\int \sqrt{x}dx + \int x^2 dx + 2\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{x^{3/2}}{1{,}5} + \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + C =$$

$$= 2x^{3/2} + \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + C .$$

Пример 26 (задачи 301–310). Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Решение. Применим подстановку $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$. Имеем

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt = \int ctg^2 t dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = = -ctgt - t + C =$$

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C .$$

Пример 27 (задачи 301–310).

$$\int x\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x; du = dx \\ dv = \sin x dx; v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C .$$

Пример 28 (задачи 311–320). Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x-3}$; 2) $\int \frac{8dx}{(x+1)^9}$; 3) $\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2}dx$; 4) $\int \frac{3x^6 + 9x^4 + 1}{x^4 + 3x^2}dx$.

Решение. 1) $\int \frac{dx}{x-3} = \int \frac{d(x-3)}{x-3} = \ln|x-3| + C$;

2) $\int \frac{8dx}{(x+1)^9} = 8\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^9} = 8\int (x+1)^{-9} d(x+1) = 8\frac{(x+1)^{-8}}{-8} + C =$

$$= -\frac{1}{(x+1)^8} + C ;$$

3) $\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2}dx = = \int \left(-2x + 1 + \frac{x-1}{2x-3x^2}\right)dx = -2\int xdx +$

$$+\int dx + \int \frac{x-1}{2x-3x^2}dx = -x^2 + x + \int \left(\frac{1}{2-3x} + \frac{1}{3x^2-2x}\right)dx = -x^2 + x - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x - 2/3} +$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x - 1/3)^2 - 1/9} = -x^2 + x - \frac{1}{3}\ln|x - 2/3| +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\frac{1}{3}} ln\left|\frac{x - 1/3 - 1/3}{x - 1/3 + 1/3}\right| + C = -x^2 + x - \frac{1}{3}\ln|x-2/3| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - 2/3}{x}\right| +$$

$$+C = -x^2 + x + \frac{1}{6}\ln|x-2/3| - \frac{1}{2}\ln|x| + C ;$$

4) для нахождения интеграла $\int \frac{3x^6 + 9x^4 + 1}{x^4 + 3x^2}dx$ выделим из непра-

вильной рациональной дроби $\frac{3x^6+9x^4+1}{x^4+3x^2}$ многочлен и правильную рациональную дробь: $\frac{3x^6+9x^4+1}{x^4+3x^2}=3x^2+\frac{1}{x^4+3x^2}$.

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^4+3x^2}=\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+3}=$$
$$=\frac{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+3)}.$$

Приравняем числители дробей:

$$1=(C+B)x^3+(A+D)x^2+3Bx+3A.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества:

$$\begin{cases}C+B=0,\\ A+D=0,\\ 3B=0,\\ 3A=1,\end{cases}\quad \begin{cases}C=0,\\ D=-1/3,\\ B=0,\\ A=1/3,\end{cases}$$

$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}$. Таким образом, $\int\frac{3x^6+9x^4+1}{x^4+3x^2}dx=$

$$=\int\left(3x^2+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right)dx=3\int x^2dx+\frac{1}{3}\int x^{-2}dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}==x^3-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C\cdot$$

Пример 29 (задачи 321–330). Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. 1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$.

Интеграл расходится.

2. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{x^2+2x+2}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{x^2+2x+2}=$$
$$=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}arctg(x+1)\Big|_a^0+$$
$$+\lim\limits_{b\to+\infty}arctg(x+1)\Big|_0^b=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(arctg1-arctg(a+1)\right)+$$
$$+\lim\limits_{b\to+\infty}\left(arctg(b+1)-arctg1\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi.$$ Интеграл сходится.

Пример 30 (задачи 331-340). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$.

Решение. Очевидно, что графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$ пересекаются в точках (0;0) и (1;1) (рисунок 21). Тогда

$$S=\int\limits_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\quad=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

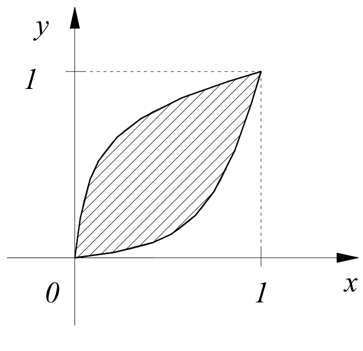


Рисунок 21

Пример 31 (задачи 331–340). Вычислить длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

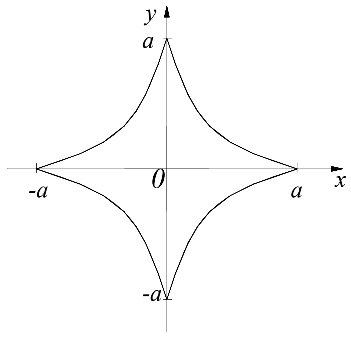


Рисунок 22

Решение. Вычислим ¼ часть длины кривой, так как астроида симметрична относительно осей *Ox* и *Oy* (рисунок 22):

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t,$$

$$y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{1}{4}l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt =$$

$= 3a\dfrac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3a}{2}$. Откуда $l = 6a$.

Пример 32 (задачи 341–350). Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса γ из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной кверху конуса, высота которого равна H, а радиус основания – R.

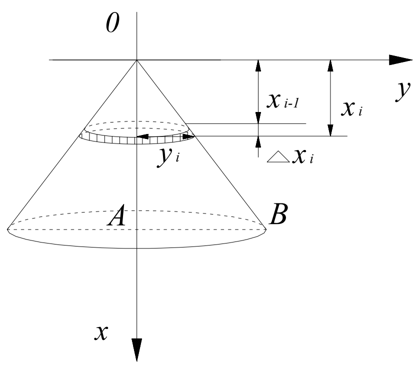


Рисунок 23

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат. Начало поместим в вершине конуса и расположим оси, как показано на рисунке 23. Ось О*x* совместим с осью симметрии конуса (положительное направление – от вершины к основанию).

Разобьем отрезок [0; *H*] произвольно на *n* частей точками $0 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n = H$ и проведем плоскости $x = 0$, $x = x_1$, $x = x_2,\ \dots,$
$x = x_{n-1}$, $x = H$. Они разбивают конус на слои высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, \dots, n$.

Приближенное выражение работы, затрачиваемой на поднятие жидкости, заполняющей выделенный элементарный объем (слой считаем за цилиндр с радиусом основания y_i) $\Delta A_i \approx \pi\gamma y_i^2 x_i \Delta x_i$, где $\pi y_i^2 \Delta x_i$ – объем элементарного слоя, x_i – высота поднятия. Из подобия треугольников определим y_i:

$\dfrac{R}{H} = \dfrac{y_i}{x_i}$. Откуда $y_i = \dfrac{R}{H}x_i$. Поэтому $\Delta A_i \approx \pi\gamma \dfrac{R^2}{H^2} x_i^3 \Delta x_i$. Суммируя величины работы, соответствующие всем элементарным слоям и, переходя к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$, находим, что искомая работа

$$A = \pi\gamma\frac{R^2}{H^2}\int_0^H x^3 dx = \frac{1}{4}\pi\gamma R^2 H^2.$$

Пример 33 (задачи 351–360). Найти частное решение дифференциального уравнения $(1+e^x)yy' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение есть ДУ с разделяющимися переменными. Имеем

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Разделив переменные, получаем:

$$ydy = \frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

Интегрируем: $\int ydy = \int \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$. Вычислив интегралы обеих частей равенства, получим общий интеграл

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + C.$$

Полагая в последнем выражении $x = 0$ и $y = 1$, будем иметь $\frac{1}{2} = \ln 2 + C$, отсюда $C = \frac{1}{2} - \ln 2$. Подставив в общий интеграл найденное значение C, получим частное решение

$$y^2 = 1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2,$$

откуда

$$y = \sqrt{1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Пример 34 (задачи 361–370). Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = -\frac{(y')^2}{2y}$.

Решение. Полагая в данном ДУ $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$, где $p = p(y)$, имеем $2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$ или $p\left(2y\frac{dp}{dy} + p\right) = 0$. Приравнивание первого множителя к нулю приводит к частному решению $y = C$, а из уравнения $2y\frac{dp}{dy} + p = 0$ находим, разделяя переменные, $2ydp = -pdy$, $2\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$.

Интегрируя, получим:

$$2\ln|p| = -\ln|y| + \ln C_1,\ p^2 = \frac{C_1}{y},\ p = \frac{C_2}{\sqrt{y}}.$$

Производя обратную замену $p = y'$, имеем ДУ $\frac{dy}{dx} = \frac{C_2}{\sqrt{y}}$. Разделив переменные и интегрируя, получим: $\int\sqrt{y}dy = \int C_2 dx$, $\frac{y^{3/2}}{3/2} = C_2 x + C_3$, $y^{3/2} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{C_3}{C_2}\right)C_2$, $y = C_1^*\left(x + C_2^*\right)^{2/3}$.

Пример 35 (задачи 371–380). Найти общее решение ДУ $y'' + 4y = \cos 2x$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' + 4y = 0$, а $r^2 + 4 = 0$ – его характеристическое уравнение. Так как $r_{1,2} = 0 \pm 2i$ – корни характеристического уравнения, то общее решение однородного ДУ имеет вид

$y^* = e^{0\cdot x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$, т. к. $\alpha = 0$ и $\beta = 2$.

Частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения будет ($s = 1$; $\beta = 2$):

$4\ \ |\ \ \bar{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

$+\,0\ |\ \ \bar{y}' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$

$1\ \ |\ \ \bar{y}'' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x +$

$\qquad + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)$,

$y'' + 4y = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x \equiv 1\cos 2x + 0\sin 2x$.

Отсюда $-4A = 0$, $4B = 1$, т. е. $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$. Частное решение исходного неоднородного уравнения $\bar{y} = \frac{1}{4}x\sin 2x$.

Общее решение данного уравнения будет:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Пример 36 (задачи 381–390). Найти общее решение системы дифференциальных уравнений (рекомендуется решать при помощи характеристического уравнения):

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} - 6x - 3y - 3z = 0, \\
\dfrac{dy}{dt} + 8x + 5y + 4z = 0, \\
\dfrac{dz}{dt} + x + y + 2z = 0.
\end{cases}
$$

Решение. Перепишем систему в нормальном виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y + 3z, \\
\dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y - 4z, \\
\dfrac{dz}{dt} = -x - y - 2z.
\end{cases} \qquad (1)
$$

Ищем частное решение системы (1) в виде $x = \alpha e^{kt}$, $y = \beta e^{kt}$, $z = \gamma e^{kt}$. Подставив эти функции и их производные в систему (1) и сократив на $e^{kt} \neq 0$, получим:

$$
\begin{cases}
(6-k)\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0, \\
-8\alpha + (-5-k)\beta - 4\gamma = 0, \\
-\alpha - \beta + (-2-k)\gamma = 0.
\end{cases} \qquad (2)
$$

Составим характеристическое уравнение системы (1)

$$
\begin{vmatrix}
6-k & 3 & 3 \\
-8 & -5-k & -4 \\
-1 & -1 & -2-k
\end{vmatrix} = 0. \qquad (3)
$$

Раскроем этот определитель по правилу треугольника:

$(6-k)(-5-k)(-2-k) + 12 + 24 - 3(5+k) - 4(6-k) - 24(2+k) = 0,$

$k^3 + k^2 - 9k - 9 = 0,$

$k^2(k+1) - 9(k+1) = 0,$

$(k+1)(k^2 - 9) = 0,$

$k_1 = -1, k_2 = 3, k_3 = -3.$

Для этих корней из системы (2) ищем соответствующие α, β, γ.

Пусть в системе (2) $k_1 = -1$, тогда

$$
\begin{cases}
(6+1)\alpha_1 + 3\beta_1 + 3\gamma_1 = 0, \\
-8\alpha_1 + (-5+1)\beta_1 - 4\gamma_1 = 0, \\
-\alpha_1 - \beta_1 + (-2+1)\gamma_1 = 0.
\end{cases}
\text{ или }
\begin{cases}
7\alpha_1 + 3\beta_1 + 3\gamma_1 = 0, \\
-8\alpha_1 - 4\beta_1 - 4\gamma_1 = 0, \\
\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0.
\end{cases}
\text{ или }
\begin{cases}
\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\
2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0.
\end{cases}
$$

Положим $\beta_1 = 1$, тогда $\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = -1, \\ 2\alpha_1 + \gamma_1 = -1. \end{cases}$ и $\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \gamma_1 = -1. \end{cases}$

Для корня $k_1 = -1$ частное решение системы (1) будет $x^{(1)} = 0e^{-t}$, $y^{(1)} = 1e^{-t}$, $z^{(1)} = -1e^{-t}$.

Пусть $k_2 = 3$, тогда из (2) получим:

$$
\begin{cases}
(6-3)\alpha_2 + 3\beta_2 + 3\gamma_2 = 0, \\
-8\alpha_2 + (-5-3)\beta_2 - 4\gamma_2 = 0, \\
-\alpha_2 - \beta_2 + (-2-3)\gamma_2 = 0.
\end{cases}
\text{ или }
\begin{cases}
\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\
2\alpha_2 + 2\beta_2 + \gamma_2 = 0, \\
\alpha_2 + \beta_2 + 5\gamma_2 = 0.
\end{cases}
\text{ или }
$$

$$
\begin{cases}
\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\
-\gamma_2 = 0, \\
\alpha_2 + \beta_2 + 5\gamma_2 = 0.
\end{cases}
$$

Отсюда $\gamma_2 = 0$. Положим $\beta_2 = 1$, то $\alpha_2 = -\beta_2 = -1$ и частные решения будут $x^{(2)} = -1e^{3t}$, $y^{(2)} = 1e^{3t}$, $z^{(2)} = 0e^{3t}$.

Пусть $k_3 = -3$, тогда после подстановки в (2) имеем:

$$\begin{cases} (6+3)\alpha_3 + 3\beta_3 + 3\gamma_3 = 0, \\ -8\alpha_3 + (-5+3)\beta_3 - 4\gamma_3 = 0, \\ -\alpha_3 - \beta_3 + (-2+3)\gamma_3 = 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ 4\alpha_3 + \beta_3 + 2\gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3 = 0. \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} -\alpha_3 - \gamma_3 = 0, \\ 3\alpha_3 + 3\gamma_3 = 0, \end{cases} \text{ то}$$

$\alpha_3 = -\gamma_3$, $\beta_3 = \gamma_3 - \alpha_3 = \gamma_3 + \gamma_3 = 2\gamma_3$, пусть $\gamma_3 = 1$, то $\alpha_3 = -1$, $\beta_3 = 2$ и частные решения будут $x^{(3)} = -1e^{-3t}$, $y^{(3)} = 2e^{-3t}$, $z^{(3)} = 1e^{-3t}$.

Общее решение исходной системы запишется в виде:

$$\begin{aligned} x &= -C_2 e^{3t} - C_3 e^{-3t}, \\ y &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + 2C_3 e^{-3t}, \\ z &= -C_1 e^{-t} + C_3 e^{-3t}. \end{aligned}$$

Пример 37 (задачи 391–400). Найти кривую, проходящую через точку (2;3) и обладающую тем свойством, что отрезок касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – точка касания (рисунок 24). Уравнение касательной к кривой в точке $M_0(x_0;y_0)$ запишется так:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0).$$

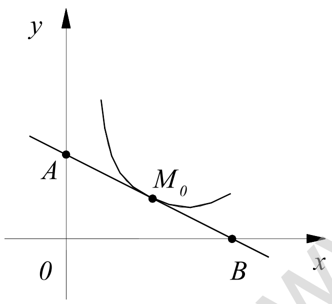


Рисунок 24

Точки $A(0;\, y_A)$ и $B(x_B;\, 0)$ – точки пересечения этой касательной с осями координат. Найдем координаты точки A, решив совместно уравнение касательной и оси Oy:

$$\begin{cases} y - y_0 = y_0'(x - x_0); \\ x = 0. \end{cases}$$

Получаем:

$$y_A - y_0 = -y_0' x_0;\ y_A = y_0 - y_0' x_0.$$

По условию задачи $\dfrac{y_A + y_B}{2} = y_{M_0}$ или $\dfrac{y_A + 0}{2} = y_0$, или $y_A = 2y_0$. Подставим это в последнее уравнение: $2y_0 = y_0 - y_0' x_0$, или $y_0 = -y_0' x_0$.

Так как точка $M_0(x_0;y_0)$ на кривой была выбрана произвольно, то полученная зависимость характерна для всех точек данной кривой. Поэтому можно записать $y'x = -y$, или $\dfrac{dy}{dx} \cdot x = -y$, $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$, то $\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C, C > 0$, $y = \dfrac{C}{x}$.

Кривая должна проходить через точку (2;3), поэтому $3 = \dfrac{C}{2}$ и $C = 6$.

Следовательно, уравнение искомой кривой $xy = 6$ (гипербола).

Пример 38 (задачи 401–410). Построить на плоскости Oxy область интегрирования двойного интеграла $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x} xy\,dy$, изменить порядок интегрирования и вычислить площадь области при заданном и измененном порядках интегрирования.

Решение. На плоскости Oxy построим кривые $x = 0$, $x = 2$, $y = 2x$, $y = x^2$. Они ограничивают область, заштрихованную на рисунке 25.

Вычислим интеграл:

$$\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} xydy = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(y^2x\right)\Big|_{x^2}^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^3 - x^5)dx = \frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(16 - \frac{64}{6}\right) = 2\frac{2}{3}.$$

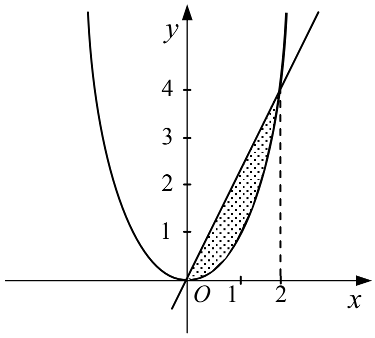


Рисунок 25

Изменив порядок интегрирования, получим $\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} xydy = \int_0^4 dy\int_{y/2}^{\sqrt{y}} xydx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^2 y\,|_{y/2}^{\sqrt{y}}\, dy =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 (y^2 - \frac{y^3}{4})dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{16}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - 16\right) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Пример 39 (задачи 411а–420а). Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$.

Решение. Данное тело ограничено сверху плоскостью $z = 1$, снизу – параболоидом $z = x^2 + y^2$ (рисунок 26). Объем тела находим, используя цилиндрические координаты:

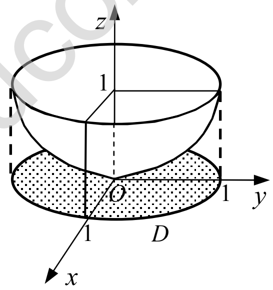


Рисунок 26

$$V = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho^2}^1 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho(1-\rho^2)d\rho = = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\,|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 40 (задачи 421–430). С помощью криволинейного интеграла вычислить работу силового поля $\vec{F} = 4x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ при перемещении точки вдоль дуги кривой $L : y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(2;8)$. Сделать чертеж L.

Решение. Чертеж изображен на рисунке 27. Чтобы найти работу, необходимо воспользоваться частным случаем формулы:

$$A = \int_L Pdx + Qdy.$$

Для данного случая по этой формуле получим

$$A = \int_L 4x^2dx + xydy = \int_0^2 (4x^2 + xx^3 \cdot 3x^2)dx =$$

$$= \int_0^2 (4x^2 + 3x^6)dx = = \left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{7}x^7\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{3} + \frac{384}{7} = 65\frac{11}{21}.$$

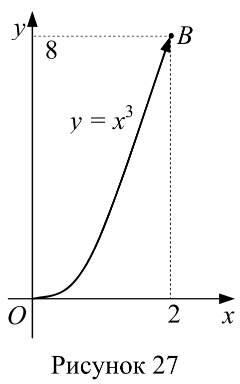


Рисунок 27

Пример 41 (задачи 431– 440). Дано векторное поле $\vec{F}=(x-y+2z)\vec{j}$ и плоскость P: $x + y + z = 1$, которая с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее ее плоскости P; λ – контур, ограничивающий σ; $\vec{n}$ – нормаль σ, направленная вне пирамиды V. Требуется: 1) сделать чертеж пирамиды; 2) вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$; 3) вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ, применив теорему Стокса к контуру λ и ограниченной им поверхности σ с нормалью $\vec{n}$.

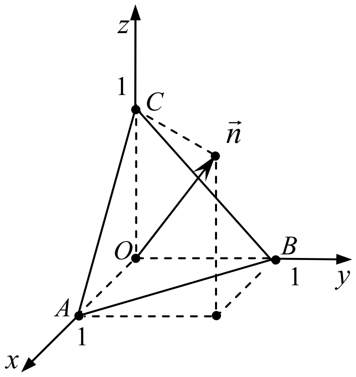


Рисунок 28

Решение. 1 Чертеж пирамиды $OABC$ изображен на рисунке 28. Поверхность σ – треугольник ABC. 2 Преобразуем уравнение плоскости P к виду $y = 1 - x - z$. Спроектируем поверхность σ на плоскость xOz (рисунок 29). Найдем требуемый поток векторного поля $\vec{F}$:

$$\Pi = \iint_{\sigma}(x-y+2z)\cdot\vec{j}\cdot\overrightarrow{d\sigma} =$$

$$= +\iint_{\sigma_{xz}}(x-(1-x-z)+2z)dxdz.$$

Перед знаком двойного интеграла поставлен знак «+», так как вектор нормали $\vec{n}$ образует с осью Oy острый угол. Далее

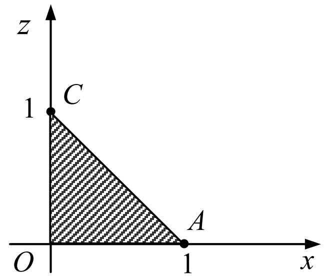


Рисунок 29

$$\Pi = \iint_{\sigma_{xz}}(2x+3z-1)dxdz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(2x+3z--1)dz = \int_0^1 (2xz+\frac{3z^2}{2}-z)\Big|_0^{1-x}dx =$$

$$= \int_0^1(-0{,}5x^2+0{,}5)dx = -\frac{0{,}5}{3}+0{,}5 = \frac{1}{3}.$$

3 Находим ротор поля

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & (x-y+2z) & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial(0)}{\partial y}-\frac{\partial(x-y+2z)}{\partial z}\right]\vec{i} +$$

$$+\left[\frac{\partial(0)}{\partial z}-\frac{\partial(0)}{\partial x}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial(x-y+2z)}{\partial x}-\frac{\partial(0)}{\partial y}\right]\vec{k} = -2\vec{i}+\vec{k}.$$

Так как уравнение плоскости треугольника ABC имеет вид $x + y + z = 1$, то ее единичный нормальный вектор

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2\vec{i}+\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Используя формулу Стокса, находим циркуляцию вектора $\vec{F}$:

$$Ц = \oint_{ABCA}\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \iint_G\left(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}_0\right)dG = -\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_G dG,$$

где G – верхняя сторона треугольника ABC.

Вычисляем полученный поверхностный интеграл. Так как уравнение поверхности G имеет вид $z = 1 - x - y$, то

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Тогда получим:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_G dG = -\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S\sqrt{3}dS = -\iint_S dS = -S = -1/2,$$

поскольку S (площадь треугольника AOB) равна 1/2. Итак,

$$Ц = \oint\limits_{ABCA} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -1/2 .$$

Пример 42 (задачи 441–450). Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}(M) = (yz - 2x)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{F}$ найти его потенциал $u = u\,(x; y; z)$.

Решение. Имеем

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz - 2x & xz - 2y & xy \end{vmatrix} = (x - x)\vec{i} - (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = \vec{0} .$$

Значит, поле вектора $\vec{F}$ потенциальное.

Так как $\operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = -2 - 2 + 0 = -4 \neq 0$, то поле $\vec{F}$ не является соленоидальным.

Найдем потенциал U, выбирая в качестве фиксированной точки начало координат, т. е. $x_o = y_o = z_o = 0$. Так как

$$P(x; y_o; z_o) = -2x,\ Q(x; y; z_o) = -2y,\ R(x; y; z) = xy, \text{ то}$$

$$U(x; y; z) = \int_0^x (-2\chi)d\chi + \int_0^y (-2\xi)d\xi + \int_0^z xy d\zeta + C = -x^2 - y^2 + xyz + C.$$

Пример 43 (задачи 451–460). Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{1 + 3^{2n}}$.

Решение. Сравним данный ряд, общий член которого $a_n = \dfrac{3^n}{1 + 3^{2n}}$, с рядом $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{3^k} + \ldots$, для которого $b_n = \dfrac{1}{3^n}$.

Поскольку $\dfrac{3^n}{1 + 3^{2n}} \leq \dfrac{3^n}{3^{2n}} = \dfrac{1}{3^n}$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{3}$, то на основании первого признака сравнения заключаем, что данный ряд также сходится.

Пример 44 (задачи 461–470). Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots .$$

Решение. Это степенной ряд, все коэффициенты его, за исключением a_o, отличны от нуля. Найдем радиус и интервал сходимости данного ряда. Здесь $a_n = \dfrac{1}{n}$ и $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, поэтому

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 .$$

Следовательно, радиус сходимости $R = 1$ и ряд сходится на интервале $(-1;1)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x = \pm 1$. При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, а при $x = -1$ – ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится в любой точке полуинтервала $[-1;1)$ и расходится вне его.

Пример 45 (задачи 471–480). Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Применить для вычисления этого интеграла формулу Ньютона - Лейбница мы не можем, так как первообразная от e^{-x^2} хотя и существует, но не выражается в элементарных функциях. Поэтому разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots .$$

Этот ряд сходится на всей числовой оси. Следовательно, его можно почленно интегрировать на любом отрезке и, в частности, на отрезке [0;1/3]:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx=\int_0^{1/3}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots\right)dx=x\Big|_0^{1/3}-\frac{x^3}{3\cdot 1!}\Bigg|_0^{1/3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}\Bigg|_0^{1/3}-$$

$$-\frac{x^7}{7\cdot 3!}\Bigg|_0^{1/3}+\dots=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3\cdot 3\cdot 1!}+\frac{1}{3^5\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{3^7\cdot 7\cdot 1!}+\dots .$$

Искомый интеграл равен сумме знакочередующегося ряда. Так как

$$\frac{1}{3^5\cdot 5\cdot 2!}=\frac{1}{2430}<0{,}001\text{, а }\frac{1}{3^3\cdot 3\cdot 1!}=\frac{1}{81}>0{,}001\text{,}$$

то с точностью до 0,001 необходимо найти сумму двух членов разложения

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}\approx 0{,}3333-0{,}0123=0{,}3210 .$$

Итак,

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx\approx 0{,}321.$$

Пример 46 (задачи 481–490). Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y''+xy=0$, удовлетворяющего данным начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Решение. Данное уравнение разрешимо относительно второй производной

$$y''=-xy, \qquad (4)$$

поэтому его решение удобно искать в виде ряда Маклорена (так как $a=0$). Искомое решение в данном случае будет выглядеть:

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots . \qquad (5)$$

В соответствии с начальными условиями $y(0)=1$ и $y'(0)=2$, по-лагая в уравнении (4) $x=0$ и $y=1$, получаем $y''(0)=0$. Чтобы найти значение третьей производной, продифференцируем уравнение (4):

$$y'''=-(y+xy'),$$

$$y'''(0)=-(1+0\cdot 2)=-1.$$

Подставим найденные значения в (5)

$$y(x)\approx 1+2x-\frac{1}{2}x^2 .$$

Пример 47 (задачи 491–500). Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2l=2$, заданную на отрезке [–1; 1] формулой $f(x)=x-1$.

Решение. Находим по формулам коэффициенты Фурье, полагая $l=1$:

$$a_o=\int_{-1}^{1}(x-1)dx=\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}=-2\ ;$$

$$a_m=\int_{-1}^{1}(x-1)\cos m\pi x dx=\int_{-1}^{1}x\cos m\pi x dx-\int_{-1}^{1}\cos m\pi x dx=$$

$$=\frac{x\sin m\pi x}{m\pi}\Bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\sin m\pi x}{m\pi}dx-\frac{\sin m\pi x}{m\pi}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{m^2\pi^2}\cos m\pi x\Big|_{-1}^{1}=0;$$

$$b_m = \int_{-1}^{1}(x-1)\sin m\pi x dx = \int_{-1}^{1}x\sin m\pi x dx - \int_{-1}^{1}\sin m\pi x dx =$$

$$= -\frac{x\cos m\pi x}{m\pi}\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos m\pi x}{m\pi}dx + \frac{\cos m\pi x}{m\pi}\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{m\pi}[\cos m\pi + \cos(-m\pi)] +$$

$$+\frac{\sin m\pi x}{m^2\pi^2}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{m\pi}[\cos m\pi - \cos(-m\pi)] = -\frac{2(-1)^m}{m\pi}.$$

Итак,

$$a_o = -2;\ a_k = 0;\ b_m = -\frac{2(-1)^m}{m\pi}.$$

В частности, $b_1 = -\frac{2}{1\pi}$, $b_2 = -\frac{2}{2\pi}$, $b_3 = \frac{2}{3\pi}, \ldots$.

Итак, ряд Фурье для функции $f(x) = x - 1$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{1} + b_n \sin\frac{n\pi x}{1}) =$$

$$= -1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \ldots\right].$$

Пример 48 (задачи 501–510). Дана функция $f(z) = e^{2z} + \frac{z}{i}$ комплексной переменной $z = x + yi$. Требуется: 1) представить функцию в виде $w = u(x;y) + v(x;y)i$; 2) проверить выполнение условий Коши – Римана; 3) найти производную $f'(z)$, вычислить значения $f(z_o)$, $f'(z_o)$ в заданной точке $z_o = 1 - i$.

Решение. 1 Найдем вначале $u(x;y)$ и $v(x;y)$. Для этого подставим $z = x + yi$, получим:

$$f(z) = f(x+iy) = e^{2(x+iy)} + \frac{x+iy}{i}.$$

Используя определения показательной функции и умножая числитель и знаменатель дроби на $(-i)$, имеем:

$$f(z) = e^{2(x+iy)} + \frac{x+iy}{i} = e^{2x}\cos 2y + ie^{2x}\sin 2y - ix + y =$$

$$= e^{2x}\cos 2y + y + i(e^{2x}\sin 2y - x).$$

Следовательно,

$$u(x,y) = e^{2x}\cos 2y + y,\ v(x,y) = e^{2x}\sin 2y - x$$

и

$$f(z) = f(x+iy) = e^{2x}\cos 2y + y + i(e^{2x}\sin 2y - x).$$

2 Проверим выполнение условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y + 1,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y - 1.$$

Условия Коши – Римана выполнены.

3 Используя одну из формул

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},\ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},\ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

найдем производную

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y + i(2e^{2x}\sin 2y - 1).$$

Найдем $f(z_o)$, $f'(z_o)$ при $z_o = 1 - i$. Так как $x_o = 1$, $y_o = -1$, получим:

$$f(z_o) = f(x_o + iy_o) = e^2\cos 2 - 1 + i(-e^2 \sin 2 + 1) \approx -4{,}07 - 5{,}72i\ ;$$
$$f'(z_o) = f'(x_o + iy_o) = 2e^2\cos 2 + i(-2e^2 \sin 2 - 1) \approx -6{,}15 - 14{,}44i\ .$$

Пример 49 (задачи 511–520). Решить дифференциальное уравнение $x'' + x' - 2x = e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

Решение. Переходим к изображающему уравнению, полагая

$$x \risingdotseq \bar{x}(p),\ x' \risingdotseq \bar{x}(p) - x(0) = p\,\bar{x}(p)\ + 1,$$

$$x'' \risingdotseq p^2\,\bar{x}(p) - px(0) - x'(0) = p^2\,\bar{x}(p)\ + p,\ e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}.$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$p^2\bar{x}(p) + p + p\bar{x}(p) + 1 - 2\bar{x}(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Решаем изображающее уравнение

$$(p^2 + p - 2)\bar{x}(p) = \frac{1}{p-1} - p - 1,$$

$$\bar{x}(p) = \frac{-p^2 + 2}{(p-1)(p^2+p-2)} = \frac{2-p^2}{(p-1)(p+2)(p-1)} = \frac{2-p^2}{(p-1)^2(p+2)}.$$

Разложим $\bar{x}(p)$ на элементарные слагаемые дроби

$$\frac{2-p^2}{(p-1)^2(p+2)} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+2}.$$

Освобождаемся от знаменателей:

$$2 - p^2 = A(p+2) + B(p-1)(p+2) + C(p-1)^2 =$$
$$= Ap + 2A + Bp^2 + Bp - 2B + Cp^2 - 2Cp + C.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p в правой и левой частях полученного тождества и составляем систему линейных уравнений для определения коэффициентов A, B и C:

$$\begin{array}{c|l} p^2 & \\ p & \\ p^o & \end{array}\!\!\begin{cases} B + C = -1, \\ A + B - 2C = 0, \\ 2A - 2B + C = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C = -1, \\ A + B - 2C = 0, \\ 4B - 5C = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9B = -7, \\ B + C = -1, \\ A + B - 2C = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{7}{9}, \\ C = -\dfrac{2}{9}, \\ A = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Подставляя значения A, B и C в схему разложения, получаем:

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{3}\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{7}{9}\frac{1}{p-1} - \frac{2}{9}\frac{1}{p+2}.$$

Переходя к оригиналам, получаем решение уравнения

$$x(t) = \frac{1}{3}te^t - \frac{7}{9}e^t - \frac{2}{9}e^{-2t}.$$

Пример 50 (задачи 521–530). Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\begin{cases} x' - x - y = t, \\ y' + 4x + 3y = 2t, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Решение. Так как

$$x \risingdotseq \bar{x}(p),\ y \risingdotseq \bar{y}(p),\ x' \risingdotseq p\,\bar{x}(p) - x(0) = p\,\bar{x}(p),$$

$$y' \risingdotseq \bar{y}(p) - y(0) = p\,\bar{y}(p),\ t \risingdotseq \frac{1}{p^2},\ 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2},$$

то изображающая система имеет вид:

$$\begin{cases} p\bar{x}(p) - \bar{x}(p) - \bar{y}(p) = \dfrac{1}{p^2}, \\ 4\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) + 3\bar{y}(p) = \dfrac{2}{p^2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (p-1)\bar{x}(p) - \bar{y}(p) = \dfrac{1}{p^2}, \\ 4\bar{x}(p) + (p+3)\bar{y}(p) = \dfrac{2}{p^2}. \end{cases}$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ 4 & p+3 \end{vmatrix} = p^2 + 2p - 3 + 4 = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p^2} & -1 \\ \dfrac{2}{p^2} & p+3 \end{vmatrix} = \frac{p+3}{p^2} + \frac{2}{p^2} = \frac{p+5}{p^2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{1}{p^2} \\ 4 & \dfrac{2}{p^2} \end{vmatrix} = \frac{2(p-1)}{p^2} - \frac{4}{p^2} = \frac{2(p-3)}{p^2}.$$

$$\bar{x}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2}, \ \bar{y}(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2(p-3)}{p^2(p+1)^2}.$$

Разложим $\bar{x}(p)$ на сумму элементарных дробей:

$$\bar{x}(p) = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D}{p+1};$$

$$p + 5 = A(p+1)^2 + Bp(p+1)^2 + Cp^2 + Dp^2(p+1) =$$
$$= Ap^2 + 2Ap + A + Bp^3 + 2Bp^2 + Bp + Cp^2 Dp^3 + Dp^2;$$

$$\begin{array}{c|l} p^3 & \\ p^2 & \\ p & \\ p^o & \end{array}\begin{cases} B + D = 0, \\ A + 2B + C + D = 0, \\ 2A + B = 1, \\ A = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5, \\ B = -9, \\ D = 9 \\ C = 4. \end{cases} \quad \bar{x}(p) = \frac{5}{p^2} - \frac{9}{p} + \frac{4}{(p+1)^2} + \frac{9}{p+1}.$$

Разлагаем $\bar{y}(p)$ на сумму элементарных дробей:

$$\frac{2(p-3)}{p^2(p+1)^2} = \frac{A_1}{p^2} + \frac{B_1}{p} + \frac{C_1}{(p+1)^2} + \frac{D_1}{p+1};$$

$$2p - 6 = A_1 p^2 + 2A_1 p + A_1 + B_1 p^3 + 2B_1 p^2 + B_1 p + C_1 p^2 + D_1 p^3 + D_1 p^2.$$

$$\begin{array}{c|l} p^3 & \\ p^2 & \\ p & \\ p^o & \end{array}\begin{cases} B_1 + D_1 = 0, \\ A_1 + 2B_1 + C_1 + D_1 = 0, \\ 2A_1 + B_1 = 2, \\ A_1 = -6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -6, \\ B_1 = 14, \\ D_1 = -14, \\ C_1 = -8. \end{cases}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{14}{p} - \frac{6}{p^2} - \frac{8}{(p+1)^2} - \frac{14}{p+1}.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение системы

$$\begin{cases} x = 5t - 9 + 4te^{-t} + 9e^{-t}, \\ y = 14 - 6t - 8te^{-t} - 14e^{-t}. \end{cases}$$