МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

И.А. Анищенко, А.А. Задерновский, М.М. Зверев,
Г.А. Куторжевская Б. В. Магницкий, Ю.К. Фетисов

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Москва 2003

ББК 22.23

Ф 45
УДК 537 (076)

Рецензенты: В.А. Фотиев,
Редактор: В.Г. Морозов

Э 45: И.А. Анищенко, А.А. Задерновский, М.М. Зверев, Г.А. Куторжевская Б.В. Магницкий, Ю.К. Фетисов . Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика. Учебное пособие по решению задач по физике для студентов вечернего отделения. /Моск. гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) -М., 2003. -54 с.
ISBN 5-7339-0027-X

Учебное пособие предназначено для студентов вечернего отделения, изучающих первую часть курса общей физики «Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика». Пособие содержит основные формулы, используемые при решении задач, 50 задач с решениями, 100 задач для самостоятельного решения, таблицу основных физических постоянных, вопросы для подготовки к экзамену и список рекомендуемой литературы. Учебный материал соответствует программе курса общей физики, изучаемого в технических вузах.
Табл. 1. Ил. 10. Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технический университет).

1604050000 - 12
Ф -------------------------- Без. обьявл. ББК 22.33
I КВ (01) - 98

ISBN 5-7339-0027-X

ВВЕДЕНИЕ

В основу принятой в Московском государственном институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА) системы обучения положена фундаментальная подготовка студентов на младших курсах в сочетании с производственным обучением на старших курсах. При этом, одной из важнейших дисциплин в теоретической и практической подготовке современного инженера является курс физики. Студенты всех специальностей изучают физику в расширенном объеме при углубленном преподавании специальных разделов.

Предлагаемое учебное пособие по решению задач по первой части курса физики “Физические основы механики. Молекулярная физика и термодинамика” предназначено для студентов всех специальностей, обучающихся на вечернем отделении МИРЭА.

Необходимость издания данного пособия связана с тем, что обучение студентов-вечерников имеет свои особенности, однако до сих пор в литературе не существовало ни одного учебного пособия для этой категории студентов. Существующие пособия, например, для студентов-заочников, рассчитаны на практически самостоятельную подготовку студентов, что не соответствует специфике обучения вечерников. Кроме того, новые достижения науки достаточно быстро становятся достоянием учебного процесса, что делает необходимым постоянное обновление задач и введение новых задач.

Материал учебного пособия по первой части содержит: основные формулы, используемые при решении задач, подробное решение 50 типовых задач, 100 задач с ответами для практических занятий, таблицу основных физических постоянных, вопросы для подготовки к экзамену и список рекомендуемой учебной литературы.

При составлении и подборе задач для учебного пособия учтена специфика специальностей, по которым ведется подготовка инженеров в МИРЭА. При этом авторы использовали как свои, оригинальные задачи, так и наиболее удачные задачи из ряда учебно-методических пособий и сборников задач, например таких, как: Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. -М.: Высшая школа, 1988; Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. -М .:Наука, 1980. Прудников В.Н., Прудникова Н.А. Пособие по физике. - М.: МГУ, 1985.

Авторы выражают глубокую благодарность преподавателям кафедры физики МИРЭА, принявшим участие в анализе задач и сделавшим ценные замечания при прочтении рукописи.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Механика

- Кинематическое уравнение движения материальной точки вдоль оси x:

$$x = f(t),$$

где $f(t)$ - некоторая функция времени.

- Средняя скорость:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

- Средняя путевая скорость:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs - путь, пройденный точкой за интервал Δt.

- Мгновенная скорость:

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

- Среднее ускорение:

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

- Мгновенное ускорение:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

- Кинематическое уравнение движения материальной точки по окружности:

$$\varphi = f(t)\ ; \qquad r = \mathrm{const}$$

- Угловая скорость (модуль):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

- Угловое ускорение (модуль):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

- Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими движение по окружности:

$$v = \omega R\ ; \quad a_\tau = \varepsilon R\ ; \quad a_n = \omega^2 R\ ,$$

где v - линейная скорость; a_τ и a_n -тангенциальное и нормальное ускорения; ω - угловая скорость; ε - угловое ускорение; R - радиус окружности.

- Полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \quad \text{или} \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

- Угол между полным ускорением $\boldsymbol{a}$ и нормальным $\boldsymbol{a_n}$:

$$\alpha = arccos(a_n/a).$$

- Кинематическое уравнение гармонических колебаний материальной точки:

$$x = Acos(\omega t+\varphi),$$

где x - смещение, A - амплитуда колебаний, ω - круговая или циклическая частота, φ - начальная фаза.

- Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$v = -A\omega\, sin(\omega t+\varphi).$$

- Ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$a = -A\omega^2 cos(\omega t+\varphi).$$

- Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l - длина маятника, g - ускорение свободного падения.

- Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}},$$

где J - момент инерции относительно оси колебаний, m - масса тела, a - расстояние от оси вращения до центра масс тела.

- Импульс тела:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v},$$

где m - масса тела, v - скорость тела.

- Второй закон Ньютона:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m \quad ,$$

где $\boldsymbol{F}$ - сила, действующая на тело, m - масса тела.

- Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости $F = -kx,$

где k - коэффициент упругости, x - абсолютная деформация;

б) сила тяжести $F = mg,$

в) сила трения $F = fN,$

где f - коэффициент трения, N - сила нормального давления.

- Закон сохранения импульса:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = const.$$

- Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно:

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad \text{или} \quad T = \frac{p^2}{2m}.$$

- Потенциальная энергия:

а) упруго деформированной пружины:

$$W = \frac{1}{2}kx^2,$$

б) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести:

$$П = mgh\ ,$$

где h - высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии $h \ll R$, где R - радиус Земли).

- Закон сохранения механической энергии:

$$E = T + П = const.$$

- Основное уравнение вращательного движения тела относительно неподвижной оси:

$$M_z = J_z\varepsilon,$$

где M_z – проекция на ось вращения z результирующего момента внешних сил, действующих на тело, ε - угловое ускорение вращения, J_z - момент инерции тела относительно оси вращения.

- Моменты инерции некоторых однородных тел массы m относительно оси, проходящей через центр масс:

а) стержня длины l относительно оси, перпендикулярной к стержню:

$$J = \frac{1}{12} ml^2 \ ;$$

б) обруча (тонкостенного цилиндра) относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча (совпадающей с осью цилиндра):

$$J = mR^2,$$

где R - радиус обруча (цилиндра);

в) диска радиусом R относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска (совпадающей с осью диска):

$$J = \frac{1}{2} mR^2.$$

- Момент инерции тела относительно произвольной оси (теорема Штейнера):

$$J = J_0 + ma^2 \ ,$$

где J_0 - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно заданной оси; m - масса тела; a - расстояние между осями.

- Момент импульса тела, вращающегося относительно неподвижной оси z:

$$L_z = J_z \omega \ ,$$

где ω - угловая скорость тела относительно оси вращения z .

- Закон сохранения момента импульса системы тел, вращающихся вокруг неподвижной оси:

$$\sum_{i=1}^{N} J_i \omega_i = const \, .$$

- Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2} \, .$$

Молекулярная физика и термодинамика

- Количество вещества однородного газа (в молях):

$$\nu = N/N_{\mathrm{A}} \qquad \text{или} \qquad \nu = m/\mu \ ,$$

где N - число молекул газа; N_A - число Авогадро; m - масса газа; μ -молярная масса газа.

- Уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа):

$$pV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT \quad ,$$

где p - давление газа, V - обьем газа, m - масса газа; μ - молярная масса газа, R - универсальная газовая постоянная, $\nu = m/\mu$ - количество вещества, T - термодинамическая температура Кельвина.

- Опытные газовые законы, являющиеся частными случаями уравнения Клапейрона-Мендлеева для изопроцессов:

  а) закон Бойля-Мариотта (изотермический процесс T=const, m=const): pV = const,

  б) закон Гей-Люссака (изобарический процесс: p=const, m=const): V/T = const,

  в) закон Шарля (изохорический процесс: V=const, m=const): p/T = const.

Закон Дальтона, определяющий давление смеси химически невзаимодействующих газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

где p_i - парциальные давления компонентов смеси, n - число компонентов смеси.

- Концентрация молекул (число молекул в единице объёма):

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{\mu}\rho \quad ,$$

где N - число молекул, содержащихся в данной системе, ρ - плотность вещества.

- Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов:

$$p = \frac{2}{3}n < w_n > \quad ,$$

где $<w_n>$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

- Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы:

$$w_n = \frac{3}{2}kT \quad ,$$

где k - постоянная Больцмана.

- Средняя полная кинетическая энергия молекулы:

$$< w_i >= \frac{i}{2}kT \quad ,$$

где i - число степеней свободы молекулы.

- Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры:

$$p = nkT \, .$$

- Скорости молекул:

а) средняя квадратичная $\quad <\mathrm{v}_{кв}> = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$,

б) средняя арифметическая $\quad <\mathrm{v}> \; = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_1}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$,

в) наиболее вероятная $\quad <\mathrm{v}> \; = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$,

где m_1 - масса одной молекулы.

- Удельные теплоёмкости газа при постоянном объёме (c_v) и при постоянном давлении (c_p):

$$c_v = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}, \qquad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu} \, .$$

- Связь между удельной (c) и молярной (C) теплоёмкостями:

$$c = C/\mu \, .$$

- Уравнение Роберта Майера:

$$C_p - C_v = R \, .$$

- Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{\mu}C_v T \quad .$$

- Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q - теплота, сообщенная системе (газу); ΔU - изменение внутренней энергии системы; A - работа, совершенная системой против внешних сил.

- Работа расширения газа:

а) в общем случае: $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p dV$,

б) при изобарическом процессе $A = p(V_2 - V_1)$,

в) при изотермическом процессе $A = \frac{m}{\mu} RT \ln(V_2/V_1)$,

г) при адиабатическом процессе $A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_v \Delta T$,

или $A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]$,

где $\gamma = C_p/C_v$ - показатель адиабаты.

- Уравнения Пуассона, связывающие параметры идеального газа при адиабатическом процессе:

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

- Термический к.п.д. цикла:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} ,$$

где Q_1 - теплота, полученная телом от нагревателя; Q_2 - теплота, переданная рабочим телом охладителю.

- Термический к.п.д. цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} ,$$

где T_1 и T_2 - термодинамические температуры нагревателя и охладителя.

РАЗДЕЛ I. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Тема 1. Кинематика поступательного и вращательного движения

Примеры решения задач

Задача 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид $x=A+Bt+Ct^2$, где A=3 м, B=2 м/с, C= -0,5 м/с^2. Найти координату x, скорость v, ускорение a точки в момент времени t=4 с.

Решение

Координату x найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A, B, C и времени t:

$$x = (3+2\ 4+(-\ 0{,}5)\ 4^2) = 3\ \text{м}.$$

Мгновенная скорость есть первая производная от координаты по времени:

$$v = dx/dt = B+2Ct.$$

В момент времени t=4 с имеем v= 2+2 (-0,5) 4= -2м/с.

Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени:

$$a=dv/dt=2C.$$

В момент времени t=4 с получаем a=2(-0,5)= -1 м/с^2.

Ответ: x=3 м, v = -2 м/с, a = -1 м/с^2 .

Задача 2. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=A+Bt+Ct^3$, где A=5 рад, B=15 рад/с, C=1 рад/с^3. Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии r=0,2 м от оси вращения, для момента времени t=2 с.

Решение

Угловую скорость тела получим, продифференцировав зависимость $\varphi(t)$ по времени:

$$\omega = B + 3Ct^2.$$

Линейная скорость точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения, будет равна:

$$v = \omega r = (B + 3Ct^2)\, r.$$

Тангенциальное ускорение найдем, вычислив производную скорости по времени:

$$a_\tau = dv/dt = 6Crt.$$

Нормальное (центростремительное) ускорение равно:

$$a_\mathrm{n} = v^2/r = (B + 3Ct^2)^2\, r.$$

Получив выражения для тангенциального и нормального ускорений, вычислим полное ускорение:

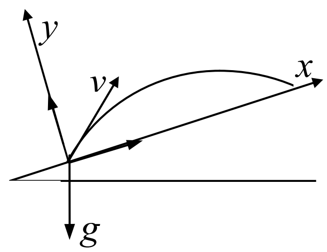
$$a = ((a_\tau)^2 + (a_\mathrm{n})^2)^{1/2} = r\,(36\, C^2 t^2 + (\mathrm{B} + 3Ct^2)^4\,)^{1/2}.$$

Подставив численные значения для t=2 с, получим a=145,8 м/с^2 . Ответ: a=145,8 м/с^2.

Задача 3. На склоне горы тело брошено вверх под углом α к поверхности горы. Определить дальность полета тела, если его начальная скорость V_0 и угол наклона горы β. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

Движение тела можно представить как результат наложения двух прямолинейных равноускоренных движений: вдоль поверхности горы и перпендикулярно ей. Выберем систему координат так, как показано на рисунке.



Будем считать, что движение тела началось в момент времени t=0. Запишем начальные условия задачи: x_0=0, y_0=0, $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$, $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$. Для проекций ускорения на оси x и y получим: $a_\mathrm{x} = -g \sin\beta$, $a_\mathrm{y} = -g \cos\beta$. Уравнения движения можно записать следующим образом:

$$\mathrm{x} = V_0\, t \cos\alpha - g \sin\beta\, t^2/2,$$

$$\mathrm{y} = V_0\, t \sin\alpha - g \cos\beta\, t^2/2.$$

В точке падения камня на землю y=0 и, следовательно, можно записать:

$$0 = V_0\, t \sin\alpha - g \cos\beta\, t^2/2\ .$$

Определив из последнего уравнения время движения тела до падения и подставив полученное выражение в уравнение движения вдоль оси x, получим для дальности полета L выражение

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g \cos\beta}\left(1 - tg\alpha\ tg\beta\right).$$

Задача 4. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε= 2 рад/с^2 . Через t= 0,5 с после начала движения полное ускорение колеса стало равно a=13,6 см/с^2. Найти радиус колеса R.

Решение

Так как угловое ускорение постоянно, а начальная угловая скорость равна нулю, угловую скорость ω в зависимости от времени можно вычислить следующим образом: $\omega=\varepsilon t$. Линейная скорость точек на краю колеса будет равна:

$$v = \omega R = \varepsilon Rt.$$

Полное ускорение точек на ободе колеса будет равно:

$$a = ((dv/dt)^2 + (v^2/R)^2)^{1/2} = ((\varepsilon R)^2 + \varepsilon^4 R^2 t^4)^{1/2} = R\varepsilon(1+\varepsilon^2\ t^4)^{1/2}.$$

Откуда получаем:

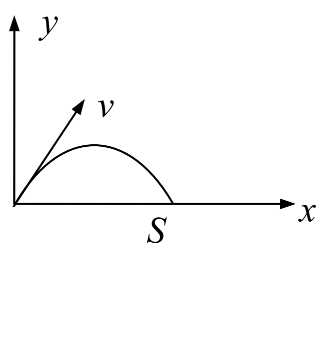
$$R = a/(\varepsilon(1+\varepsilon^2 t^4)^{1/2}.$$

Подставляя численные значения, находим: R=0,061 м.

Ответ: R=0,061м

Задача 5. Пуля выпущена с начальной скоростью v_0=200 м/с под углом α=60° к горизонту. Определить максимальную высоту H_{max} подъема, дальность S полета и радиус R кривизны траектории пули в её наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение



Выберем систему координат так, как показано на рисунке. В любой точке траектории на тело будет действовать только сила тяжести, направленная вертикально вниз. Следовательно, вдоль оси x движение будет равномерным, а вдоль оси y - равноускоренным. Так как в начальный момент времени координаты тела равны нулю, то уравнения движения тела могут быть записаны следующим образом:

$$x = V_{0x}\, t\,, \quad y = V_{0y}\, t - gt^2/2\,,$$

где обозначено $V_x = V_0\cos\alpha$ и $V_y = V_0\sin\alpha$ - проекции скорости в момент времени t на оси x и y. Когда тело достигнет максимальной высоты, то $V_y=0$. Следовательно $V_0\sin\alpha = g\cdot t_{max}$, откуда находим время t_{max}, за которое пуля достигнет верхней точки: $t_{max}=V_0\sin\alpha/g$. В верхней точке $y=H_{max}$. Подставляя в уравнение движения вдоль оси y найденное значение t_{max}, получаем:

$$H_{max} = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}\,.$$

В точке падения пули на землю y=0. Подставляя в уравнение движения вдоль оси y значение y=0 и сокращая на t, получаем:

$$0 = V_0\sin\alpha - \frac{gt_s}{2}\,,$$

где t_s – полное время движения пули. Отсюда находим

$$t_s = \frac{2V_0\sin\alpha}{g}\,.$$

Подставляя найденное значение в уравнение движения вдоль x, получаем:

$$S = V_0 t_s\cos\alpha = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

Для определения радиуса кривизны траектории в наивысшей точке заметим, что в каждой точке траектории полное ускорение равно ускорению силы тяжести. В верхней точке траектории оно равно центростремительному ускорению, т. е. :

$$g = \frac{V_x^2}{R} = \frac{V_0^2\cos^2\alpha}{R}\,,$$

откуда следует, что

$$R = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

Подставляя численные значения в выражения для R, S и H_{max}, получим R=1,02 км, S=3,53 км, H_{max}=1,53 км

Ответ: H_{max} =1,53 км, S=3,53 км, R=1,02 км

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Вентилятор вращается с частотой n=900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N=75 оборота. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки? (Ответ: t=10 с).

Задача 7. Камень, брошенный горизонтально, через время t=0,5 с после начала движения имел скорость V, в 1,5 раза большую скорости V_x в момент бросания. С какой скоростью V_x брошен камень? (Ответ: V_x= 4,4 м/с)

Задача 8. Две материальные точки движутся согласно уравнениям: $x_1=A_1t+B_1t^2+C_1t^3$ и $x_2=A_2t+B_2t^2+C_2t^3$, где A_1=4 м/с, B_1=8 м/с^2, C_1= -16 м/с^3; A_2=2 м/с, B_2= -4 м/с^2, C_2=1 м/с ^{3}. В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент. (Ответ: t=0,235 с, v_1=5,1 м/с, v_2=0,29 м/с.)

Задача 9. Уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид $x=At+Bt^2+Ct^3$, где A=2 м/с, B= -3 м/с^2, C=4 м/с^3. Найти зависимость скорости v и ускорения a точки от времени t; координату x, скорость v и ускорение a точки через t=2 с после начала движения. (Ответ: x=24 м, v=38 м/с, a=42 м/с^2.)

Задача 10. Движение точки по прямой задано уравнением $x=At+Bt^2$, где A=2 м/с, B= -0,5 м/с^2. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ движения точки в интервале времени от t_1=1 с до t_2=3 с. (Ответ:$\langle v \rangle$=0,5 м/с.)

Задача 11 Точка движется по прямой согласно уравнению $x=At+Bt^3$, где A=6 м/с, B= -0,125 м/с^3. Определить среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ точки в интервале времени от t_1=2 с до t_2=6 с. (Ответ:$\langle v \rangle$=3 м/с.)

Задача 12. Точка движется по окружности радиусом R=4 м. Закон её движения выражается уравнением $\xi = A + Bt^2$, где A=8 м, B= -2 м/с^2. Найти момент времени t, когда нормальное ускорение точки a_n=9 м/с^2, а также скорость v, тангенциальное ускорение a_τ и полное ускорение $a_{полн}$ точки в этот момент. (Ответ: t=1,5 с, v= -6 м/с, a_τ= -4 м/с^2, $a_{полн}$=9,84 м/с^2.)

Задача 13. Точка движется по окружности радиуса R=10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти a_τ, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения скорость точки стала равна v=79,2 см/с. (Ответ: a_τ=0,1 м/с^2.)

Задача 14. В первом приближении можно считать, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите с линейной скоростью V. Найти угловую скорость ω вращения электрона вокруг ядра и его нормальное ускорение a_n. Принять радиус орбиты электрона равным $R=0{,}5\cdot10^{-10}$ м и линейную скорость электрона на этой орбите $V=2{,}2\cdot10^6$ м/с.
(Ответ: $\omega=4{,}4\cdot10^{16}$ рад/с, $a_n=9{,}7\cdot10^{22}$ м/с^2.)

Задача 15. С высоты h=2 м вниз под углом $\alpha=30^0$ к вертикали брошен мяч с начальной скоростью V_0=8,7 м/с. Найти расстояние S между двумя последовательными ударами мяча о землю. (Ответ: S=8,7 м.)

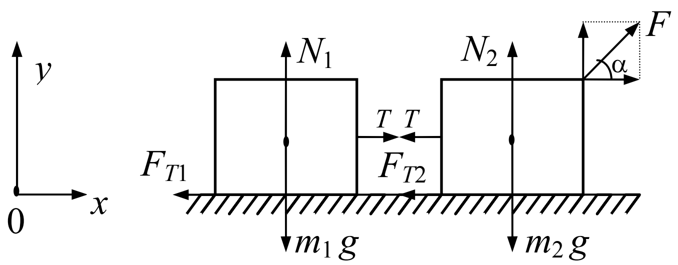
Тема 2. Динамика материальной точки. Закон сохранения импульса

Примеры решения задач

Задача 1. На горизонтальной плоскости находятся связанные невесомой и нерастяжимой нитью два тела, массы которых m_1 и m_2. К телу массой m_2 приложена сила F, направленная под углом α к горизонту. Коэффициент трения между грузами и плоскостью равен f. Определить натяжение нити и ускорения тел.

Решение

На тело массой m_1 действуют: сила тяжести $m_1\boldsymbol{g}$, сила реакции опоры $\boldsymbol{N}_1$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}_1$, сила трения $\boldsymbol{F}_{т1}$. На тело массой m_2 действуют: сила тяжести $m_2\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\boldsymbol{N}_2$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}_2$, сила трения $\boldsymbol{F}_{т2}$ и сила $\boldsymbol{F}$. Направим ось x системы координат вдоль плоскости, а ось y - перпендикулярно плоскости, как показано на рисунке.



Так как по условию задачи нить нерастяжима и невесома, то $T_1=T_2=T$ и ускорения обоих тел одинаковы. Уравнения движения в проекциях на координатные оси могут быть записаны следующим образом:

$$m_1 a = T - F_{т1},$$
$$m_2 a = F\cos\alpha - T - F_{т2},$$
$$0 = N_1 - m_1 g,$$
$$0 = N_2 - m_2 g + F\sin\alpha .$$

Так как коэффициент трения f известен, то получим:

$$F_{т1} = fN_1 , \qquad F_{т2} = fN_2 .$$

Подставляем полученные выражения в уравнения движения, имеем:

$$m_1 a = T - fN_1,$$
$$m_2 a = F\cos\alpha - T - fN_2 ,$$
$$N_1 = m_1 g ,$$
$$N_2 = m_2 g - F\sin\alpha .$$

Решая эту систему уравнений, получим ответ к задаче:

$$a = \frac{F(f\sin\alpha + \cos\alpha)}{m_1 + m_2} - fg , \qquad T = \frac{m_1 F(f\sin\alpha + \cos\alpha)}{m_1 + m_2} .$$

Задача 2. Поезд массой m=500 т, двигаясь равнозамедленно, в течение времени t=1 мин уменьшает свою скорость от v_1=40 км/час до v_2= 28 км/час. Найти силу торможения F.

Решение

Так как ускорение тела постоянно, оно может быть найдено из соотношения $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$. Согласно второму закону Ньютона:

$$F = ma = \frac{m(v_2 - v_1)}{t}.$$

Подставляя численные значения, получим F=27,8 кН.
Ответ: F=27,8 кН.

Задача 3. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси, делая n=25 оборотов в минуту. На каком расстоянии R от оси вращения диска может удержаться находящееся на нем тело, если коэффициент трения f=0,2?

Решение

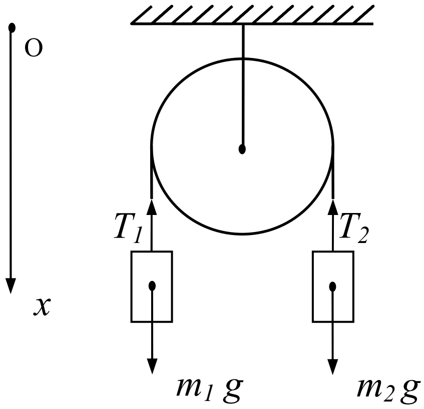
Единственной силой, действующей на тело в горизонтальном направлении и препятствующей его соскальзыванию с диска, является сила трения F.
В вертикальном направлении на тело действуют две равные по величине но противоположно направленные силы - сила тяжести mg и сила реакции опоры N. Так как диск равномерно вращается, полное ускорение тела равно нормальному ускорению $a_n=\omega^2R$, где ω - угловая скорость вращения тела. Уравнение движения тела в момент начала соскальзывания может быть записано следующим образом: $m\omega^2R = F$. Учитывая, что $F=fmg$, и $\omega=2\pi n$, получаем

$$R = \frac{fg}{4\pi^2 n^2}$$

Подставляя численные значения, находим R=0,29 м.
Ответ: R=0,29 м.

Задача 4. На невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены два груза массами m_1 =3 кг и m_2=5 кг как показано на рисунке. Определить ускорения грузов и силы натяжения нитей. Массой блока и силой трения в блоке пренебречь.

Решение



Так как нить нерастяжима и невесома, а массой блока и силой трения можно пренебречь, то оба груза будут двигаться с равными по модулю ускорениями, и модули сил натяжения нити T_1 и T_2 по обе стороны блока будут равны между собой. Выберем положительное направление оси x сверху вниз (см. рисунок).

На каждый из грузов действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения нити. Уравнения движения грузов могут быть записаны следующим образом:

$$m_2 a = m_2 g - T_1, \qquad - m_1 a = m_1 g - T_2 , \qquad T_1 = T_2 .$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} \qquad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя численные значения, получим a=2,45 м/с^2, T=36,75 Н.
Ответ: a=2,45 м/с^2, T=36,75 Н.

Задача 5. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на два равных осколка. Первый осколок упал на расстоянии s от места разрыва (по горизонтали), второй осколок упал вертикально вниз. Определить скорость снаряда в момент разрыва, если известно, что взрыв произошел на высоте H, а упавший по вертикали осколок падал время T .

Решение

Движение осколков происходит под действием только силы тяжести. Направим ось x по горизонтали, а ось y по вертикали (см. рисунок). За начало отсчета времени примем момент взрыва. Координаты осколков в начальный момент времени будут равны:

$$x_{10}=0, \quad x_{20}=0, \quad y_{10}=H, \quad y_{20}=H.$$

Проекция скорости второго осколка на ось x равна $v_{20x}=0$. Закон движения осколков может быть записан следующим образом:

$$x_1 = v_{10x}\, t, \qquad y_1 = H + v_{10y}\, t - gt^2/2,$$

$$x_2 = 0, \qquad y_2 = H - v_{20y}\, t - gt^2/2.$$

В момент падения на землю $y_1 = y_2 = 0$, $x_1 = s$, то есть можно записать:

$$s = v_{10x}\, T_1, \tag{1}$$

$$0 = H + v_{10y}\, T_1 - \frac{gT_1^2}{2} \tag{2}$$

$$0 = H - v_{20y}\, T - gT^2/2 \tag{3}$$

Здесь время полета первого осколка обозначено T_1 .

В верхней точке траектории скорость снаряда направлена по горизонтали. Следовательно, на основании закона сохранения импульса, вертикальные составляющие скоростей осколков сразу после взрыва равны по величине и противоположны по направлению, то есть:

$$v_{10y} = -v_{20y}\,. \tag{4}$$

Для горизонтального направления из закона сохранения импульса следует: $mv=(m/2)v_{10x}$, где m - масса снаряда до взрыва, v - скорость снаряда. Сокращая на m, получаем $v=v_{10x}/2$. Используя выражение (1), получаем:

$$v = \frac{s}{2T_1} \tag{5}$$

Из уравнения (3) находим, что $v_{20y} = \dfrac{H}{T} - \dfrac{gT}{2}$. Подставляя полученное выражение в (2), получаем квадратное уравнение для определения T_1 - времени полета первого осколка:

$$gTT_1^{\,2} - (2H-gT^2)T_1 - 2HT = 0.$$

Решая это уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получаем: $T_1 = \dfrac{2H}{gT}$. Подставив полученное значение для T_1 в (5), находим искомую скорость снаряда $v = \dfrac{sgT}{4H}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Два бруска массами m_1=1 кг и m_2=4 кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением a будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу F=10 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения T шнура, соединяющего бруски, если силу F приложить к первому бруску? Ко второму? Трением пренебречь. (Ответ: a=2 м/с^2, T_1=8 Н, T_2=2 Н.)

Задача 7. Наклонная плоскость, образующая угол α=25° с плоскостью горизонта, имеет длину L=2 м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время t=2 с. Определить коэффициент трения f тела о плоскость. (Ответ: f=0,35.)

Задача 8. На верхнем краю наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить. К одному концу нити привязан груз массой m_1=2 кг, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце висит груз массой m_2=1 кг. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол β=20°; коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью f=0,1.Считая нить и блок невесомыми, найти ускорение a, с которым движутся грузы, и силу натяжения нити T. (Ответ: a=0,42 м/с^2, T=9,36 Н.)

Задача 9. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом f=0,2. Какое ускорение a в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с неё соскользнуть? (Ответ: a>0,2g.)

Задача 10. Небольшое тело скользит с вершины сферы вниз. На каком расстоянии h от вершины тело оторвется от поверхности сферы и полетит вниз? Трение ничтожно мало. Радиус сферы R=1 м. (Ответ: h =0,33 м.)

Задача 11. С какой максимальной скоростью может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая дугу радиусом R=90 м, если коэффициент трения резины о почву f=0,4? На какой угол φ от вертикального направления он должен при этом отклониться?. (Ответ: v=19 м/с, φ=21,8°.)

Задача 12. Шар массой m_1=10 кг сталкивается с шаром массой m_2=4кг.Скорость первого шара v_1=4 м/с, второго - v_2=12 м/с. Найти общую скорость u шаров после удара в двух случаях: 1) когда второй шар нагоняет первый, движущийся в том же направлении; 2) когда шары движутся навстречу друг другу. Удар считать прямым, центральным, неупругим. (Ответ: u_1=6,28 м/с, u_2= -0,57 м/с.)

Задача 13. В лодке массой M=240 кг стоит человек массой m=60 кг. Лодка плывет со скоростью v=2 м/с. Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью u=4 м/с (относительно лодки). Найти скорость лодки после прыжка человека: 1) вперед по движению лодки; 2) в сторону, противоположную движению лодки. (Ответ: v_1=1 м/с, v_2=3 м/с.)

Задача 14. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием M=15 т. Орудие стреляет вверх под углом φ=60^0 к горизонту в направлении пути. С какой скоростью u покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда m=20 кг и он вылетает со скоростью v_2=600 м/с? (Ответ: u=0,4 м/с.)

Задача 15. Из пушки массой M=1.5 т, свободно соскальзывающей по наклонной плоскости и прошедшей уже путь L=16 м, производится выстрел в горизонтальном направлении. Снаряд вылетает со скоростью v=600 м/с, при этом пушка после выстрела останавливается. Угол наклона плоскости к горизонту β=30°. Найти массу снаряда m. (Ответ: m =36 кг.)

Тема 3. Закон сохранения полной механической энергии. Работа сил.

Примеры решения задач.

Задача 1. Пуля массой m=20 г, летящая с горизонтальной скоростью v=500 м/с, попадает в мешок с песком массой M=5 кг, висящий на длинном шнуре, и застревает в нем. Найти высоту H, на которую поднимется мешок, и долю η кинетической энергии, которая будет израсходована на пробивание песка.

Решение

В результате попадания пули, мешок приобретает начальную скорость u и поднимается на высоту H. Для нахождения скорости воспользуемся законом сохранения импульса системы пуля-мешок. В течение кратковременного взаимодействия двух этих тел внешние силы - сила тяжести и сила натяжения шнура вертикальны, поэтому проекция импульса на горизонтальную ось постоянна. Следовательно, выполняется закон сохранения импульса:

$$mv = (m+M)u. \qquad (1)$$

Рассмотрим движение мешка в поле тяготения Земли. Сила натяжения шнура работы не совершает, так как во время движения она перпендикулярна перемещению. Следовательно, к системе ”мешок с пулей - Земля“ можно применить закон сохранения полной механической энергии:

$$[(m+M)u^2]\,/2 = (m+M)gH. \qquad (2)$$

Энергия, затраченная на пробивание песка, т.е. на совершение работы против сил неупругой деформации, равна:

$$A = T_1 - T_2 = mv^2/2 - (m+M)u^2/2. \qquad (3)$$

Доля кинетической энергии, израсходованная на эту работу:

$$\eta = A/T_1. \qquad (4)$$

Из уравнений (1-4) имеем:

$$H = u^2/2g = 0{,}2 \text{ м}, \qquad \eta = [M/(M+m)]\ 100\ \% = 96{,}5\ \%\ . \qquad (5)$$

Ответ: H=0,2 м, η =96,5 %.

Задача 2. Боек (ударная часть) свайного молота массой m=500 кг падает на сваю массой M=100 кг со скоростью v_1=4 м/с. Определить: 1) кинетическую энергию T_1 бойка в момент удара; 2) энергию T_2, затраченную на углубление сваи в грунт; 3) кинетическую энергию T, перешедшую во внутреннюю энергию системы; 4) КПД η удара бойка о сваю. Удар бойка о сваю рассматривать как неупругий.

Решение

Кинетическую энергию бойка в момент удара о сваю находим по формуле:

$$T_1 = mv_1^2/2 = 4 \text{ кДж}. \tag{1}$$

Чтобы определить энергию, затраченную на углубление сваи, предварительно найдем скорость системы боек-свая непосредственно после удара. Для этого применим закон сохранения импульса, который в случае неупругого удара выражается формулой:

$$mv_1 + Mv_2 = (M+m)u\ , \tag{2}$$

где v_2 - скорость сваи перед ударом, u - скорость бойка и сваи непосредственно после удара. Свая перед ударом находилась в состоянии покоя, поэтому v_2=0. Так как удар неупругий, то боек и свая после удара движутся как одно целое, т.е. с одинаковой скоростью u. В результате сопротивления грунта скорость бойка и сваи после удара быстро гасится, а кинетическая энергия, которой обладает система боек-свая, затрачивается на углубление сваи в грунт. Эту энергию находим по формуле:

$$T_2 = [(m+M)u^2\,]/2. \tag{3}$$

Подставив (1) и (2) в (3), получаем:

$$T_2 = [m/(m+M)]T_1 = 3{,}33 \text{ кДж}.$$

Боек до удара обладал энергией T_1; T_2 - энергия, затраченная на углубление сваи в грунт. Следовательно, во внутреннюю энергию, связанную с неупругой деформацией сваи, превратилась энергия:

$$T=T_1-T_2 =0{,}67 \text{ кДж}.$$

Свайный молот служит для забивания сваи в грунт; следовательно, энергию T_2 следует считать полезной. КПД удара бойка о сваю выразится как отношение энергии T_2, затраченной на углубление сваи в грунт, ко всей затраченной энергии T_1:

$$\eta = T_2 / T_1. \qquad (4)$$

Подставив (3) в (4), имеем $\eta = m/(m+M) = 83{,}3\ \%$.

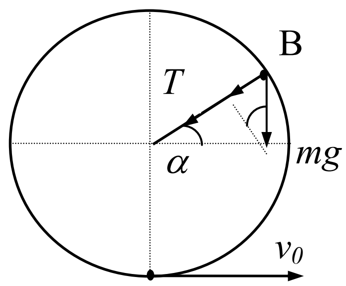
Ответ: T_1=4 кДж, T_2=3,33 кДж, T=0,67 кДж, η=83,3 %.

Задача 3. Шарик массы m, подвешен на нити, длина которой r. В положении равновесия ему сообщили в горизонтальном направлении такую скорость v_0, при которой он отклонился на угол, больший 90^0. Запасенной шариком энергии недостаточно для совершения полного оборота в вертикальной плоскости. На какую максимальную высоту поднимется шарик?

Решение

Пока шарик не сошел с круговой траектории, на него действует сила тяжести mg и сила натяжения нити T . Уравнение движения шарика в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{mv^2}{r} = T + mg\sin\alpha .$$



Если в точке В шарик сошел с круговой траектории, то сила натяжения нити, начиная с этого момента, становится равной нулю и уравнение принимает вид:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\sin\alpha . \qquad (1)$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgH . \qquad (2)$$

Из геометрических соображений можно записать

$$H = r + r\sin\alpha . \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1), (2) и (3), получим ответ к задаче:

$$H = \frac{v_0^2 + gr}{3g} \ .$$

Задача 4. На какую величину x сожмет пружину гиря, брошенная вниз с начальной скоростью V с высоты H, если та же гиря, положенная на верхний край пружины, сжимает ее на величину L?

Решение

Так как трение отсутствует, полная механическая энергия системы должна сохраняться. Возьмем нулевой уровень отсчета потенциальной энергии на уровне верхнего края сжатой пружины после попадания в нее летящей гири. В этом случае в начальный момент времени энергия системы E_1 может быть вычислена следующим образом:

$$E_1 = \frac{mV^2}{2} + mg(H + x)\,,$$

где m - масса гири. В конечном состоянии скорости гири и пружины будут равны нулю, и вся энергия перейдет в энергию упругой деформации пружины $E_2 = \frac{kx^2}{2}$. Для определения коэффициента упругости пружины k воспользуемся тем условием, что положенная на пружину гиря сжимает ее на величину L. Это означает, что выполняется условие равновесия $kL=mg$, откуда сразу следует $k=mg/L$.

Из условия сохранения энергии $E_1=E_2$. Подставляя в это соотношение приведенные выше выражения, получаем уравнение относительно неизвестной величины x:

$$\frac{mV^2}{2} + mg(x + H) = \frac{mgx^2}{2L}\,.$$

Решая это уравнение, получаем ответ к задаче:

$$x = L + \sqrt{L^2 + 2LH + \frac{V^2 L}{g}}\,.$$

Задача 5. Тело массой m падает с высоты H и углубляется в грунт на глубину L. Какова сила сопротивления грунта F, если тело начало падать с начальной скоростью V_0?

Решение

Будем считать, что потенциальная энергия тела в конечном положении (в момент остановки) равна нулю. При движении в грунте на тело кроме силы тяжести действует сила сопротивления. Работа силы сопротивления равна $A=FL\cos\alpha=$ $=-FL,$ так как угол α между направлением действия силы и перемещением равен 180^0. Начальная энергия тела E_1 равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$E_1 = \frac{mV_0^2}{2} + mg(H+L).$$

Разность между конечным и начальным значениями механической энергии будет равна работе силы сопротивления грунта, т.е.:

$$\frac{mV_0^2}{2} + mg(H+L) = FL.$$

Отсюда получаем ответ к задаче: $F = \dfrac{m}{L}\left(\dfrac{V_0^2}{2} + g(H+L)\right).$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Шар, движущийся со скоростью v_1=10 м/с, упруго соударяется с покоящимся шаром, имеющим в n=5 раз большую массу, и отлетает в направлении, перпендикулярном направлению его первоначального движения. Определить скорости u_1 и u_2 шаров после удара. (Ответ: u_1= 8,16 м/с, u_2=2,58 м/с.)

Задача 7. Из пружинного пистолета выстрелили пулькой, масса которой m=5 г. Жесткость пружины k=1,25 кН/м. Пружина была сжата на Δx=8 см. Определить скорость пульки v при вылете ее из пистолета. (Ответ: v=40 м/с.)

Задача 8. Шар массой m=1,8 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара шар потерял долю η=0,36 своей кинетической энергии T_1. Определить массу большего шара. (Ответ: M=16,2 кг.)

Задача 9. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой m=5кг и, вследствие отдачи, покатился назад со скоростью v=1 м/с. Масса конькобежца M=60 кг. Определить работу A, совершенную конькобежцем при бросании гири. (Ответ: A=390 Дж.)

Задача 10. Тело массой m=0,1 кг падает с высоты H=0,1 м на горизонтальную пластинку массой M=0,2 кг, лежащую на верхнем конце вертикально расположенной пружины, коэффициент жесткости которой k=20 Н/м. В результате абсолютно неупругого соударения пластинка опустилась на расстояние h от своего первоначального положения. Сжатие пружины происходит в области упругой деформации. Определить h. (Ответ: h=0,13 м.)

Задача 11. Вычислить работу, совершаемую на пути S=12 м равномерно возрастающей силой, если в начале пути сила была равна F_1=10 Н, а в конце пути - F_2 =46 Н. (Ответ: A=336 Дж.)

Задача 12. Стальной шарик массой m=20 г, падая с высоты h=1 м на стальную плиту, отскакивает от неё на высоту H=81 см. Найти импульс p, полученный плитой за время удара, и количество теплоты Q, выделившееся при ударе. (Ответ: p=0,17 кг·м/с, Q=37,2 мДж.)

Задача 13. Найти работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой m=1 кг от v_1=2 м/с до v_2=6 м/с на пути длиной S=10 м. На всем пути действует сила трения F=2 Н. (Ответ: A= 36 Дж.)

Задача 14. С горы высотой h=2 м и длиной основания b=5 м съезжают санки, которые затем останавливаются, пройдя по горизонтали расстояние L=35 м от основания горы. Найти коэффициент трения f. (Ответ: f = 0,05.)

Задача 15. Локомотив массой M=8,6 т начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $v = b\sqrt{s}$, где b=0,22 м/с, s - пройденный путь, взятый в метрах. Найти суммарную работу A всех сил, действующих на локомотив за первые t=5 минут после начала движения. (Ответ: A=226 кДж.)

Тема 4. Динамика твердого тела. Основное уравнение динамики вращательного движения.

Примеры решения задач.

Задача 1. Вал в виде сплошного цилиндра массой m_1=10 кг насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой m_2=2 кг. С каким ускорением a будет опускаться гиря, если её предоставить самой себе?

Решение

Линейное ускорение гири равно тангенциальному ускорению точек вала, лежащих на его цилиндрической поверхности, и связано с угловым ускорением вала соотношением:

$$a = \varepsilon r, \tag{1}$$

где r -радиус вала.

Угловое ускорение вала выражается основным уравнением динамики вращающегося тела:

$$\varepsilon = M/J\ , \tag{2}$$

где M - вращающий момент, действующий на вал; J -момент инерции вала относительно оси вращения. Рассматриваем вал как однородный цилиндр. Тогда его момент инерции относительно геометрической оси равен:

$$J = m_1 r^2 /2\ . \tag{3}$$

Вращающий момент M, действующий на вал, равен произведению силы натяжения T шнура на радиус вала:

$$M = Tr\ . \tag{4}$$

Силу натяжения шнура найдем из следующих соображений. На гирю действуют две силы: сила тяжести $m_2 g$, направленная вниз, и сила натяжения T шнура, направленная вверх. Равнодействующая этих сил вызывает равноускоренное движение гири. По второму закону Ньютона:

$$m_2g - T = m_2a. \qquad (5)$$

Подставив (3-5) в (2), получаем угловое ускорение ε вала:

$$\varepsilon = 2m_2(g-a)/m_1r^2. \qquad (6)$$

Для определения линейного ускорения гири подставим последнее выражение в формулу (1) и получим: $a = 2m_2g/(m_1+2m_2) = 2{,}80$ м /с^2 .

Ответ: $a = 2{,}80$ м/с^2.

Задача 2. К ободу однородного диска радиусом R=0,5 м и массой m=50 кг приложена касательная сила F=200 Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр}$=25 Н·м. Найти угловое ускорение диска ε и момент времени t после начала движения, когда диск будет иметь частоту вращения n=10 об/с.

Решение

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения:

$$J\varepsilon = FR - M_{тр} , \qquad (1)$$

где $J=mR^2/2$ - момент инерции диска. Результирующий момент сил, под действием которого вращается диск равен: $(FR-M_{тр})$, так как момент силы F и момент силы трения направлены противоположно.

Из (1) находим угловое ускорение:

$$\varepsilon = 2(FR-M_{тр})/(mR^2) = 12 \text{ рад/с}^2 . \qquad (2)$$

Так как угловое ускорение постоянно, то искомое время определим из уравнения:

$$t = \omega/\varepsilon = 2\pi n/\varepsilon = 5{,}23 \text{ с} , \qquad (3)$$

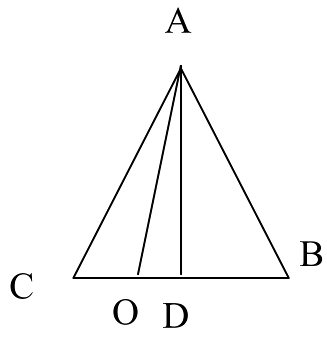
где $\omega=2\pi n$ - угловая скорость .

Ответ: ε =12 рад/с^2, t=5,23 с.

Задача 3. Найти момент инерции системы из трех грузов массой m=1кг каждый, размещенных в вершинах невесомого равностороннего треугольника со стороной a=1 м, относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через третью часть одной из его сторон.

Решение

Момент инерции системы будет равен сумме моментов инерции отдельных ее частей. Рассмотрим треугольник ABC (см. рисунок). Из рисунка видно, что расстояние двух грузов от оси вращения будет равно:



$$OC = r_1 = a/3\ , \quad OB = r_2 = 2a/3.$$

Для определения расстояния между осью и третьим грузом рассмотрим треугольник AOD. В этом треугольнике $OD = a/2 - a/3 = a/6$, $AD = a\sqrt{3}/2$

и расстояние от третьего груза до оси :

$$OA = r_3 = (a^2/36 + 3a^2/4)^{1/2} = a\sqrt{7}/3.$$

Момент инерции системы грузов равен

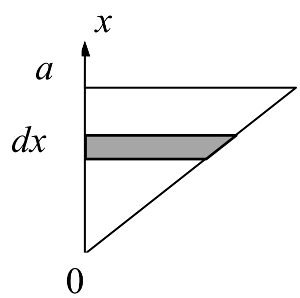
$$J = m\,r_1^2 + m\,r_2^2 + m\,r_3^2 = 4/3\ ma^2.$$

Подставляя численные значения, получим ответ: $J = 1{,}3$ кг·м^2.

Задача 4. Найти момент инерции плоского равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной a=0,2 м и массой m=1 кг относительно оси, совпадающей с одной из его сторон.

Решение

Направим ось x вдоль одного из катетов, за начало отсчета примем вершину треугольника (см. рисунок). Разобъем площадь треугольника на бесконечно малые слои шириной dx, перпендикулярные оси вращения. Рассмотрим один из таких слоев, расположенный на расстоянии x от начала координат. Так как момент инерции тела относительно какой-либо оси равен сумме моментов инерции его частей относительно этой оси, то момент инерции треугольника будет равен сумме моментов инерции выделенных слоев.



Каждый слой представляет собой стержень с длиной, равной x (так как угол при вершине треугольника равен 45^0, длина каждого слоя равна расстоянию от слоя до начала координат). Момент инерции стержня длиной x относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец, равен $dJ=1/3\cdot x^2\,dm$, где dm - масса слоя длиной x и шириной dx. Чтобы найти величину dm, нужно площадь слоя умножить на массу единицы площади. Так как площадь треугольника равна $S=a^2/2$, а площадь слоя равна xdx, то масса слоя выражается как: $dm=\frac{m}{S}xdx=\frac{2m}{a^2}xdx$. Момент инерции слоя будет равен $dJ=\frac{2m}{3a^2}x^3dx$. Тогда для момента инерции треугольника получаем выражение:

$$J=\int dJ=\frac{2m}{3a^2}\int_0^a x^3dx=\frac{ma^2}{6}.$$

Подставляя численные значения, находим J=0,0067 кг·м^2.
Ответ: J=0,0067 кг·м^2.

Задача 5. Найти момент инерции J плоского кольца массой m=1 кг относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через точку, лежащую на внешнем крае кольца. Внутренний радиус кольца равен r=10 см, внешний - R=20 см.

Решение

Согласно теореме Штейнера, момент инерции кольца J относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через точку на краю кольца, может быть вычислен следующим образом: $J=J_0+ma^2$, где J_0 - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (центр кольца), a - расстояние между осью и центром масс. В нашем случае $a=R$. Для нахождения момента инерции J_0 заметим, что момент инерции любого тела равен сумме моментов инерции его частей. Соответственно, момент инерции J_1 сплошного диска радиусом R относительно его оси равен сумме момента инерции J_2

сплошного диска радиуса r относительно этой оси, и момента инерции кольца J_0.

Моменты инерции дисков равны, соответственно: $J_1=M_1R^2/2$ и $J_2=M_2r^2/2$, где M_1 и M_2 - массы дисков. Тогда можно записать:

$$\frac{M_1R^2}{2}=\frac{M_2r^2}{2}+J_0.$$

Из последнего выражения получаем:

$$J_0=\frac{M_1R^2-M_2r^2}{2}.$$

Если плотность материала кольца ρ, а его толщина d, то $M_1=\rho d\pi R^2$, $M_2=\rho d\pi r^2$ и масса кольца $m=\rho d\pi(R^2-r^2)$, откуда

$$\rho=\frac{m}{\pi d(R^2-r^2)}.$$

Подставляя найденные значения ρ, M_1 и M_2 в выражение для J_0, получаем: $J_0=m(R^2+r^2)/2$, откуда следует:

$$J=J_0+mR^2=\frac{m(3R^2+r^2)}{2}.$$

Подставляя численные значения, окончательно находим J=0,065 кг·м^2.

Ответ: J=0,065 кг м^2.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Однородный стержень длиной L=1 м и массой m=0,5 кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением ε вращается стержень, если на него действует момент сил M=0,098 Н·м?

(Ответ: ε=2.35 рад/с^2.)

Задача 7. Колесо, момент инерции которого J=245 кг·м^2, вращается с частотой n=20 об/с. Через время t=1 мин. после того, как на колесо перестал действовать момент сил M, оно остановилось. Найти момент сил трения M_1 и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском. (Ответ: M_1=513 Н·м, N=600 об.)

Задача 8. Две гири с массами m_1=2 кг и m_2=1 кг соединены нитью, перекинутой через блок массой m=1кг. Найти ускорение *a,* с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь. (Ответ: a= 2,8 м/с^2, T_1=14 Н, T_2=12,6 Н.)

Задача 9. На барабан радиусом R=20 см, момент инерции которого J=0,1 кг·м ^{2}, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m=0,5кг. До начала вращения барабана высота груза над полом была равна h=1 м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $E_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь. (Ответ: t=1,1 с, $E_к$=0,81 Дж, T=4,1 Н.)

Задача 10. Однородный диск радиусом R=0,2 м и массой m=5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к плоскости диска. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega=A+Bt$, где B=8 рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь. (Ответ: F=4 Н.)

Задача 11. Два маленьких шарика массой m=10 г каждый скреплены тонким невесомым стержнем длиной L=20 см. Определить момент инерции J системы относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через центр масс системы. (Ответ: J=0,0002 кг·м ^{2}.)

Задача 12. Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной L=30 см и массой m=100 г относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) его середину; 3) точку, отстоящую от конца стержня на 1/3 его длины.
(Ответ : J_1=0,003 кг·м ^{2}, J_2=0,00075 кг·м ^{2}, J_3=0,001 кг·м^2.)

Задача 13. Найти момент инерции J плоской однородной прямоугольной пластины массой m=800 г относительно оси, совпадающей с одной из её сторон, если длина другой стороны равна L=40 см.

(Ответ: J=0,0427 кг·м ^{2}.)

Задача 14. Определить момент инерции J тонкого однородного диска массой m=100 г и радиусом R=30 см относительно оси, перпендикулярной к диску и проходящей через середину его радиуса. (Ответ: J=0,00675 кг·м^2.)

Задача 15. Определить момент инерции J кольца массой m=50 г и радиусом R=10 см относительно оси, лежащей в плоскости кольца и касательной к нему. (Ответ: J=0,00075 кг·м^2.)

Тема 5. Закон сохранения момента импульса. Энергия вращательного движения.

Примеры решения задач.

Задача 1. Платформа в виде диска радиусом R=1,5 м и массой M=180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n=10 об/мин. В центре платформы стоит человек массой m=60 кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он отойдет от центра платформы на расстояние, равное половине радиуса платформы?

Решение

Используя закон сохранения момента импульса, можно записать:

$$(J_1+J_2)\omega_1 = (J_1+J\,)\omega_2\ , \tag{1}$$

где J_1 - момент инерции платформы; J_2 - момент инерции человека, стоящего в центре платформы; ω_1 - угловая скорость платформы с человеком, стоящим в центре; J - момент инерции человека, находящегося от края платформы на расстоянии $R/2$; ω_2 - угловая скорость платформы с человеком, находящимся от края платформы на расстоянии $R/2$. Линейная скорость человека, отстоящего от края платформы на $R/2$, связана с угловой скоростью соотношением :

$$v = \omega_2 R/2. \tag{2}$$

Определив ω_2 из уравнения (1) и подставив полученное выражение в формулу (2) , будем иметь:

$$v = [(J_1+J_2)\omega_1 R]/(J_1+J). \tag{3}$$

Момент инерции платформы рассчитываем как для диска. Следовательно, $J_1=MR^2/2$. Момент инерции человека рассчитываем как для материальной точки. Поэтому: $J_2=0$, $J=mR^2/4$. Угловая скорость платформы до перехода человека равна $\omega_1=2\pi n$. Подставив J_1, J_2, J и ω_1 в соотношение (3), получим:

$$v = 2\pi nMR/(2M+m) = 0{,}67 \text{ м/с}.$$

Ответ; v=0,67 м/с.

Задача 2. Стержень длиной L=1,5 м и массой M=10 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В нижний край стержня ударяет пуля массой m=10 г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью v=500 м/с, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

Решение

Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара пуля и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω и сообщает ему кинетическую энергию :

$$T = J\omega^2/2, \qquad (1)$$

где J - момент инерции стержня относительно оси вращения. Затем стержень поворачивается на искомый угол φ, причем центр масс стержня поднимается на высоту $h=(L/2)(1-\cos\varphi)$. В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией :

$$\Pi = Mg(L/2)(1 - \cos\varphi) \ . \qquad (2)$$

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии. Приравняв правые части равенств (1) и (2), и подставив выражение для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через край стержня и перпендикулярной ему ($J=ML^2/3$), получим:

$$\cos\varphi = 1 - L\omega^2/(3g). \qquad (3)$$

Применив закон сохранения момента импульса, можем написать:

$$mvL = (J + mL^2)\omega. \qquad (4)$$

Подставив ω из (4) в (3), получим:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{3m^2v^2}{gL(M+3m)^2}.$$

Подставляя числовые значения, находим $\cos\varphi$=0,95, откуда $\varphi \approx 18°$.

(Ответ: $\varphi \approx 18°$.)

Задача 3. Два шара разного диаметра начинают катиться с одинаковой скоростью V=100 см/с вверх по наклонной плоскости под углом α=30^0 к горизонту. Меньший шар сделан из алюминия, другой из стали. Какой путь пройдет каждый из шаров до остановки?

Решение

Пусть масса одного из шаров равна m, а радиус его R. Энергия движущегося шара равна $W=mV^2/2+J\omega^2/2$, где $J=2/5mR^2$ -момент инерции шара, ω - угловая скорость вращения. Так как шар движется без проскальзывания, то $\omega=V/R$. Высоту подъема шара по наклонной плоскости h находим из закона сохранения энергии:

$$mV^2/2 + J\omega^2/2 = mgh.$$

Подставляя в это выражение значения момента инерции шара и угловой скорости, получаем $mV^2/2 + mV^2/5 = mgh$, откуда следует $h=7V^2/(10g)$.

Путь, пройденный шаром вдоль наклонной плоскости до остановки, связан в высотой подъема соотношением:

$$S = h/\sin\alpha = \frac{7V^2}{10g\sin\alpha}.$$

Из полученного выражения видно, что высота подъема и, соответственно, путь, пройденный шаром до остановки, не зависит от массы и диаметра шара, а определяется лишь

значением его скорости. Таким образом, для шаров, изготовленных из разных материалов, пройденный путь будет одинаков. Подставляя численные значения, получим S=14 см.
Ответ: S=14 см.

Задача 4. Вращающийся с частотой n=100 об/с свинцовый диск радиусом R= 10 см и толщиной h=1 см опустили в сосуд с водой объемом V=10 литров. Найти изменение температуры воды ΔT в сосуде вследствие торможения диска. Начальные значения температуры диска и воды одинаковы, плотность свинца $\rho_с$=11300 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$=1000 кг/м^3, удельные теплоемкости свинца и воды равны $C_с$=130 Дж/(кг·К), $C_в$=4,2 кДж/(кг·К).

Решение

Изменение температуры воды в сосуде найдем исходя из уравнения теплового баланса:

$$W = m_с\, C_с\, \Delta T + m_в\, C_в\, \Delta T\,,$$

где W - энергия вращающегося диска, $m_с$ и $m_в$ - массы свинца и воды.

Из этого уравнения получаем:

$$\Delta T = W/(m_с\, C_с + m_в C_в).$$

Энергию W находим из соотношения $W=J\omega^2/2$, где J - момент инерции диска, ω - его угловая скорость. Для диска $J=m_сR^2/2$. Угловая скорость связана с количеством оборотов в единицу времени как $\omega=2\pi n$.

Масса тела равна произведению его плотности на объем:

$$m_с = \rho_с \pi R^2 h, \quad m_в=\rho_в V.$$

Подставляя найденные значения, получаем расчетную формулу:

$$\Delta T = \frac{\rho_с \pi^3 R^4 h n^2}{\rho_с \pi R^2 h C_с + \rho_в V C_в}\,.$$

Подставляя сюда численные значения параметров, найдем ΔT=0,08 К.

Ответ: ΔT=0,08 К.

Задача 5. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны J_1=0,25 кг·м^2 и J_2=0,40 кг·м^2, а угловые скорости ω_1=6 рад/с и ω_2=3 рад/с. После падения верхнего диска на нижний, оба диска, благодаря трению между ними, начали через некоторое время вращаться с одинаковой угловой скоростью. Найти работу A силы трения.

Решение

Работа сил трения будет равна разности кинетической энергии двух вращающихся дисков до их соприкосновения и кинетической энергии системы, образовавшейся после того, как оба диска начали вращаться вместе. Найдем энергию первого W_1 и второго W_2 дисков: $W_1=J_1\omega_1^2/2$, $W = J_2\omega_2^2/2$. Момент инерции образовавшейся системы равен $J=J_1+J_2$, а угловая скорость вращения равна ω. Тогда энергия системы будет равна $W=J\omega^2/2$. Работа сил трения находится из соотношения:

$$A = W_1 + W_2 - W \qquad (1)$$

Для нахождения угловой скорости вращения системы дисков воспользуемся законом сохранения момента импульса (из условия задачи следует, что система является замкнутой, и, следовательно, момент импульса не изменяется). Имеем: $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$, откуда следует:

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}.$$

Подставляя найденные значения W, W_1, W_2 и ω в уравнение (1), получим:

$$A = \frac{J_1 J_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(J_1 + J_2)}.$$

Подставив сюда численные значения, найдем работу A=0,69 Дж.

Ответ: A=0,69 Дж.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Человек массой m=70 кг находится на неподвижной платформе массой M=30 кг. С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек начнет двигаться по окружности радиуса r=0,7 м вокруг оси вращения. Скорость движения человека относительно платформы равна v=1,2 м/с. Радиус платформы R=1,5 м. Считать платформу круглым однородным диском, а человека точечной массой. (Ответ: ω=0,75 рад/с.)

Задача 7. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью v=2 м/с. На какую высоту H может вкатиться обруч на горку за счет своей кинетической энергии? (Ответ: H=0,4 м.)

Задача 8. Однородный стержень длиной L=60 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Шарик, летящий перпендикулярно к оси стержня, ударяет в его середину и упруго отскакивает без потери скорости. Найти скорость v шарика, если стержень отклонился на прямой угол. Масса стержня в n=10 раз больше массы шарика: M=10m. (Ответ: v=14 м/с.)

Задача 9. Два маленьких шарика массами m_1=40 г и m_2=120 г соединены стержнем длиной l=20 см, масса которого ничтожно мала. Система вращается около оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через центр инерции системы. Определить импульс p и момент количества движения L системы. Частота вращения системы равна n=3 об/с. (Ответ: p=0, L=0,0226 кг·м^2/с.)

Задача 10. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n_1=15 об/мин. На краю платформы стоит человек. Когда человек перешел в центр платформы, частота возросла до n_2=25 об/мин. Масса человека m=70 кг. Определить массу M платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. (Ответ: M=210 кг.)

Задача 11. С наклонной плоскости скатываются без скольжения сплошной и полый цилиндры. Найти отношение скоростей их центров тяжести: 1) по истечении времени t от начала движения; 2) в результате скатывания с высоты H. [Ответ: 1) v_1/v_2=4/3; 2) $v_1/v_2=\sqrt{4/3}$].

Задача 12. Найти линейные ускорения a_1, a_2 и a_3 центров шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. угол наклона плоскости β=30°, начальная скорость всех тел v=0. Сравнить найденные ускорения с ускорением a тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения. (Ответ: a_1=3,50 м/с^2, a_2=3,27 м/с^2, a_3=2,44 м/с^2, a=4,9 м/с^2.)

Задача 13. Вертикальный столб высотой h=5 м подпиливается у основания и падает на землю. Определить линейную скорость v его верхнего конца в момент удара о землю. (Ответ: v=12 м/с.)

Задача 14. Пуля массой m=10 г летит со скоростью v=800 м/с, вращаясь около продольной оси с частотой n=3000 об/с. Принимая пулю за цилиндр диаметром d=8 мм, определить полную кинетическую энергию T пули. (Ответ: T=3,21 кДж.)

Задача 15. К ободу диска массой m=5 кг приложена касательная сила F=19,6 Н. Какую кинетическую энергию E будет иметь диск через время t=5 с после начала действия силы? (Ответ: E=1,92 кДж.)

Тема 6. Механические колебания

Примеры решения задач.

Задача 1. Однородный стержень длиной L=0,5 м совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Найти период колебаний T стержня.

Решение

Для периода колебаний T физического маятника имеем выражение: $T = 2\pi\sqrt{J/mga}$, где J - момент инерции маятника относительно точки подвеса, m - его масса, a - расстояние между центром масс маятника и осью вращения, g - ускорение свободного падения. Момент инерции стержня относительно перпендикулярной ему оси, проходящей через его конец, равен $J=mL^2/3$. Центр масс стержня совпадает с его серединой, потому $a=L/2$. Подставив найденные выражения в формулу для периода колебаний, получим: $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$. Подставив численные значения, найдем T=1,16 с.

Ответ: T=1,16 с.

Задача 2. Вычислить период малых колебаний поплавка - вертикально расположенного цилиндра, которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса поплавка m=50 г, его радиус R=3,2 мм, плотность жидкости ρ=1,00 г/см^3. Вязкость жидкости считать равной нулю.

Решение

На поплавок действуют две силы: сила тяжести и выталкивающая сила $F_а$. В положении равновесия эти силы равны по величине и противоположны по направлению. Если тело сместить вниз от положения равновесия в вертикальном направлении на величину x, то возникнет, согласно закону Архимеда, сила, направленная в сторону, противоположную смещению, и равная $F_A= -\rho gV$, где V - объем жидкости, вытесненный телом при его отклонении от положения равновесия, $m=\rho V$ - масса вытесненной жидкости.

Объем $V=\rho R^2x$, и потому $F_A= -\rho g\pi R^2x$. Знак “-” указывает, что направление действия силы противоположно направлению смещения x. Тогда уравнение движения поплавка можно записать следующим образом:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho g\pi R^2 x \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho g\pi R^2}{m}x = 0.$$

Сравнивая полученное выражение с дифференциальным уравнением незатухающих колебаний $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$, где ω - круговая частота, получим $\omega^2=\frac{\rho g \pi R^2}{m}$. Так как T=2π/ω, то период колебаний равен $T=\frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{m}{\rho g \pi}}$. Подставляя численные значения, находим, что T=2,5 с.
Ответ: T=2,5 с.

Задача 3. Амплитуда колебаний математического маятника длиной L=1 м за время t=10 мин уменьшилась в N=2 раза. Определить логарифмический декремент затухания колебаний Θ.

Решение
Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени имеет вид $A(t)=A_0\exp(-\delta t)$, где A_0 - амплитуда колебаний в момент времени t=0, δ - коэффициент затухания. Логарифмический декремент затухания Θ определяется следующим образом:

$$\Theta=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\delta T,$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ - амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на время T, равное периоду колебаний.
По условию задачи $A(t)=A_0/N$, откуда получаем: $\exp(-\delta t)=1/N$ и $\delta=(\ln N)/t$.
Период колебаний математического маятника равен: $T=2\pi\sqrt{L/g}$. Подставляя величины T и δ, находим логарифмический декремент затухания:

$$\Theta=\delta T=\frac{2\pi\ln N}{t}\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Используя численные значения, получаем Θ=0,00232.
Ответ: Θ=0,00232.

Задача 4. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой A=3 см и угловой частотой $\omega=\pi/2$ с$^{-1}$.

Решение

Уравнение гармонических колебаний имеет вид: $x = A\cos(\omega t+\varphi)$, где φ - начальная фаза колебаний. Скорость движения точки v и ее ускорение a найдем, вычислив производные:

$$v = dx/dt = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \quad \text{и} \quad a = dv/dt = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi).$$

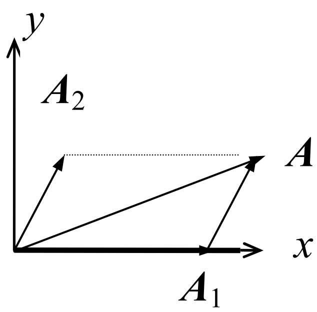
Максимальные значения функций $\sin x$ и $\cos x$ равны 1. Соответственно, максимальные значения модулей скорости и ускорения точки будут равны: $v_{max}=A\omega$, $a_{max}=A\omega^2$.

Подставляя численные значения, получим v_{max}=4,71 см/с, a_{max}=7,40 см/с^2.

Ответ: v_{max}=4,71 см/с, a_{max}=7,40 см/с^2.

Задача 5. Складываются два колебания одинакового направления, описываемых уравнениями $x_1=A_1\cos\omega t$ и $x_2=A_2\cos(\omega t+\pi/3)$, где A_1=4 см, A_2=2 см. Найти амплитуду результирующего колебания.

Решение



Для решения задачи удобнее всего использовать метод векторных диаграмм. Диаграмма сложения колебаний показана на рисунке. Так как начальная фаза первого колебания равна нулю, то вектор, соответствующий этому колебанию, направлен вдоль оси абсцисс. Вектор, соответствующий второму колебанию, составляет с осью x угол π/3, равный начальной фазе второго колебания. Амплитуду результирующего колебания находим из треугольника AA_1O по теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi-\pi/3).$$

Подставляя численные значения, получим A = 5,3 см.

Ответ: A = 5,3 см.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость равна 20 см/с. Найти угловую частоту ω колебаний и максимальное ускорение $a_{\max}$ точки. (Ответ: ω=2 с$^{-1}$, $a_{\max}$=40 см/с^2.)

Задача 7. Определить период колебаний маятника часов, представляющего собой закрепленный на невесомом стержне диск радиуса 10 см, колеблющийся относительно горизонтальной оси, проходящей через конец стержня и перпендикулярной плоскости диска. Расстояние между центром диска и осью 0,8 м. (Ответ: T=1,8 с.)

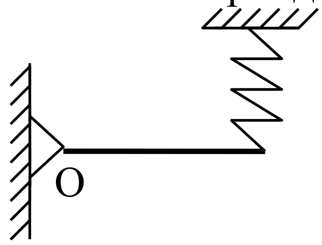
Задача 8. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой A=4 см. Определить полную энергию E колебаний гири, если жесткость k пружины равна 1 кН/м (Ответ: E=0,8 Дж.)

Задача 9. Диск радиусом R=24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно к плоскости диска. Определить приведенную длину L и период колебаний T такого маятника. (Ответ: L=36 см, T= 1,2 с.)

Задача 10. Определить период T затухающих колебаний, если период T_o собственных колебаний системы равен 1 с и логарифмический декремент колебаний Θ=0,628. (Ответ: T=1,005 с.)

Задача 11. С каким ускорением a и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней математический маятник, период колебаний которого в неподвижной системе равен T=1 с, за время t = 2 мин 30 с совершил N = 100 колебаний?
(Ответ: a=5,4 м/с^2, направление движения - любое.)

Задача 12. Однородный стержень массы m совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O, как показано на рисунке. Правый конец стержня подвешен на невесомой пружине жесткости k. Найти период колебаний стержня, если в положении равновесия он горизонтален.



(Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$.)

Задача 13. Материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x=A\cos(\omega t)$ и $y=B\sin(\omega t)$, где A=2 м, B=1 м. Найти траекторию движения точки.

(Ответ: $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$, $x^2/4 + y^2/1 = 1$.)

Задача 14. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой и имеющих одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ складываемых колебаний. (Ответ: $\Delta\varphi=2\pi/3$ или $\Delta\varphi=4\pi/3$ рад.)

Задача 15. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1=T_2=1.5$ с и одинаковыми амплитудами $A_1=A_2=2$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_1=\pi/2$ и $\varphi_2=\pi/3$. Определить амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. (Ответ: A=3,86 см, $\varphi=0,417\pi$ рад.)

РАЗДЕЛ II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Тема 7. Молекулярное строение вещества. Уравнение состояния. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Примеры решения задач

Задача 1. Найти молярную массу μ серной кислоты H_2SO_4.

Решение

Молярная масса вещества определяется по формуле $\mu = kM_r$. Здесь обозначено $k = 10^{-3}$ кг/моль, M_r - относительная молекулярная масса вещества, равная $M_r = \sum n_i A_{ri}$, где n_i - число атомов i-го химического элемента, A_{ri} - относительная атомная масса химического элемента из таблицы Менделеева. Для серной кислоты имеем:

$$M_r = 2A_{rH} + A_{rS} + 4A_O = 2+32+64=98.$$

Окончательно получаем $\mu = 98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Ответ: $\mu = 98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Задача 2. Определить количество вещества ν и число N молекул азота массой $m = 0,2$ кг.

Решение

Молярная масса азота $\mu = kM_r = k(2A_r) = 28\ 10^{-3}$ кг/моль. Количество вещества азота $\nu = m/\mu = 0,2/(28 \cdot 10^{-3}) = 7,14$ моль. В одном моле вещества содержится число молекул, равное числу Авогадро. Поэтому, для искомого числа молекул азота получаем $N = \nu N_A = 4,3\ 10^{24}$ молекул.

Ответ: $\nu = 7,14$ моль; $N = 4,3 \cdot 10^{24}$.

Задача 3. В баллонах вместимостью V_1=20 л и V_2=44 л содержится газ. Давление в первом баллоне p_1=2,4 МПа, во втором p_2=1,6 МПа. Определить общее давление p и парциальные давления p'_1 и p'_2 после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.

Решение

Уравнения состояния газов до их смешивания можно записать в виде:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT, \qquad p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu}RT.$$

Уравнения состояния газов после смешивания записываются в виде:

$$p_1'(V_1 + V_2) = \frac{m_1}{\mu}RT,\ p_2'(V_1 + V_2) = \frac{m_2}{\mu}RT.$$

Замечая, что правые части соответствующих уравнений совпадают, получаем для парциальных давлений выражения:

$$p_1' = \frac{p_1V_1}{V_1+V_2} = 0{,}75 \text{ Мпа} \quad \text{и} \qquad p_2' = \frac{P_2V_2}{V_1+V_2} = 1{,}1 \text{ МПа}$$

Согласно закону Дальтона полное давление равно сумме парциальных давлений $p = p'_1 + p'_2$ = 1,85 МПа.

Ответ: p'_1=0,75 МПа, p'_2=1,1 МПа и p=1,85 МПа.

Задача 4. Определить количество вещества ν и концентрацию n молекул газа, содержащегося в колбе вместимостью V=240 см^3 при температуре T=290 К и давлении p=50 кПа.

Решение

Концентрацию n молекул газа можно найти из уравнения состояния записанного в виде $p = nkT$, где k- постоянная Больцмана: $n = \frac{p}{kT} = 1{,}25 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ Из уравнения состояния Клапейрона-Менделеева $pV = \nu RT$ получаем для количества вещества следующее выражение $\nu = \frac{pV}{RT} = 4{,}98$ моль.

Ответ: ν=4,98·10^{-3} моль.

Задача 5. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа равна $v_{кв}$=450 м/с. Давление газа равно $p=5\cdot10^4$ Па. Найти плотность газа при этих условиях.

Решение

Запишем основное уравнения молекулярно-кинетической теории в виде:

$$p=\frac{2}{3}n\frac{mv_{кв}^2}{2}$$

где m - масса молекулы, $v_{кв}$ - средняя квадратичная скорость, n – концентрация молекул. Плотность вещества по определению есть $\rho=nm$. Тогда выражение для давления принимает вид $p=\frac{1}{3}\rho v_{кв}^2$.

Отсюда для плотности газа окончательно получаем $\rho=\frac{3p}{v_{кв}^2}=0{,}74\,\text{кг/м}^3$

Ответ: ρ=0,74 кг/м^3.

Задача для самостоятельного решения.

Задача 6. В баллоне вместимостью V=3 л находится кислород массой m=4 г. Определить количество вещества ν и число N молекул газа. (Ответ: ν=0,125 моль, N=7,52·10^{22} молекул.)

Задача 7. Кислород при нормальных условиях заполняет сосуд вместимостью V=11,2 л. Определить количество вещества газа и его массу. (Ответ: ν=0,5 моль; m=16 г.)

Задача 8. Газ при температуре T=309 К и давлении p=0.7 МПа имеет плотность ρ=12 кг/м^3. Определить относительную молекулярную массу M_r газа. (Ответ: M_r=44.)

Задача 9. В баллоне содержится газ при температуре t_1=100^0 С. До какой температуры t_1 нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза? (Ответ: t=473^0 С.)

Задача 10. В баллоне вместимостью V=25 л находится водород при температуре T=290 К. После того как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp=0,4 МПа. Определить массу m израсходованного водорода. (Ответ: m=8,33 г.)

Задача 11. В сосуде вместимостью V=0,01 м^3 содержится смесь газов - азота массой m_1=7 г и водорода массой m_2=1 г при температуре T=280 К. Определить давление смеси газов. (Ответ: p=175 кПа.)

Задача 12. В колбе вместимостью V=100 см^3 содержится некоторый газ при температуре T=300 К. На сколько понизится давление p газа в колбе, если вследствие утечки из колбы выйдет N=10^{20} молекул ? (Ответ: Δp=4,14 кПа.)

Задача 13. Найти массу воздуха, заполняющего аудиторию высотой 5 м и площадью пола 200 м^2. Давление воздуха 750 мм рт. ст., температура в помещения 17^0 С. Массу одного киломоля воздуха принять равной 29 кг/кмоль. (Ответ: m=1200 кг.)

Задача 14. Газ массой 12 г занимает объем $4\cdot10^{-3}$ м^3 при температуре 7^0 С. После нагревания газа при постоянном давлении, его плотность стала равна $6\cdot10^{-4}$ г/см^3. До какой температуры нагрели газ?
(Ответ: t=1127^0 С.)

Задача 15. Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 750 мм рт. ст. равна $8{,}2\cdot10^{-5}$ г/см^3. Чему равна масса одного киломоля этого газа, если значение плотности дано для температуры 17^0 С ? (Ответ: $v_{кв}$=1900 м/с, μ=2 кг/кмоль.)

Тема 8. Статистика идеального газа. Теплоемкость.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить среднюю кинетическую энергию w_n поступательного движения и среднее значение w_i полной кинетической энергии молекулы водяного пара при температуре T=600 К. Найти кинетическую энергию W поступательного движения всех молекул пара, содержащего количество вещества ν=1 кмоль.

Решение

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы находится по формуле: $w_n = \frac{3}{2}kT$, где k - постоянная Больцмана. Тогда w_n=1,24·10^{-20} Дж. Для среднего значения w_i полной энергии имеем w_i=(i/2)kT=2,48·10^{-20} Дж, где i=6 - число степеней свободы трехатомной молекулы водяного пара. В одном моле вещества содержится N_A молекул, следовательно в ν молях будет νN_A молекул. Тогда кинетическая энергия W поступательного движения всех молекул пара находится как:

$$W = w_n \nu N_A = (3/2)kT\nu N_A = (3/2)RT\nu = 7{,}48 \text{ МДж}.$$

Ответ: w_n=1,24 ·10^{-20} Дж; w_i=2,48 ·10^{-20} Дж; W= 7,48 МДж.

Задача 2. Во сколько раз средняя квадратичная скорость пылинки, взвешенной в воздухе, меньше средней квадратичной скорости молекул воздуха? Масса пылинки m=10^{-8} г. Воздух считать однородным газом, масса одного киломоля которого равна μ=29 кг/кмоль.

Решение

Используем известные выражения для средней квадратичной скорости частицы $v_{кв} = \sqrt{3kT/m}$ или $v_{кв} = \sqrt{3RT/\mu}$. Масса пылинки известна, поэтому ее средняя квадратичная скорость $v_1 = \sqrt{3kT/m}$. Для воздуха задана молярная масса, поэтому средняя квадратичная скорость молекул воздуха $v_2 = \sqrt{3RT/\mu}$. Из этих выражений находим искомое отношение $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{N_A m}{\mu}} = 1{,}44 \cdot 10^7$.

Ответ: v_2/v_1=1,44·10^7.

Задача 3. Чему равны удельные теплоемкости c_v и c_p некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях равна ρ=1,43 кг/м^3 ?

Решение

Удельные теплоемкости связаны с молярными теплоемкостями формулами $c_v = \frac{C_v}{\mu}$ и $c_p = \frac{C_p}{\mu}$. Для молярных теплоемкостей справедливы выражения $C_v = \frac{i}{2}R$ и $C_p = \frac{i+2}{2}R$. Из уравнения Клапейрона-Менделеева $pV = \frac{m}{\mu}RT$ получаем выражение для давления $p = \frac{\rho}{\mu}RT$, где $\rho = \frac{m}{V}$ - плотность газа. При нормальных условиях p=p_0=1,01·10^5 Па, T=T_0=273 К. Тогда, для молярной массы μ имеем $\mu = \rho R\frac{T_0}{p_0}$. Окончательно, для теплоемкостей получаем выражения:

$$c_v = \frac{ip_0}{2T_0\rho} = 646{,}8 \text{ Дж/(кг·К)} \text{ и } c_p = \frac{(i+2)p_0}{2T_0\rho} = 905{,}5 \text{ ДЖ/(кг К)}.$$

Ответ: c_v=646,8 Дж/(кг·К), c_p = 905,5 ДЖ/(кг·К).

Задача 4. При каком давлении p средняя длина свободного пробега l_{cp} молекул азота равна 1 м, если температура газа T=300 К?

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул газа $l_{cp} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, где d - эффективный диаметр молекул (для азота d=0,38 нм), n - концентрация молекул. Связь между давлением газа, концентрацией и температурой определяется формулой p=nkT, где k - постоянная Больцмана. Из этих формул для искомого давления следует $p = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 l_{cp}}$=6,47 мПа.

Ответ: p=6,47 мПа.

Задача 5. Найти среднее число столкновений в 1 секунду молекул некоторого газа, если средняя длина свободного пробега при этих условиях равна $5 \cdot 10^{-4}$ см, а средняя квадратичная скорость его молекул равна $v_{кв}$=500 м/с.

Решение

Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени дается выражением $z = \sqrt{2}\pi d^2 n v$. Средняя длина свободного пробега находится по формуле $l_{cp} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$.

Из этих двух выражений следует. что $z = \dfrac{v}{l_{cp}}$. Для получения окончательного ответа надо выразить v через $v_{кв}$, где средняя арифметическая скорость записывается как $v = \sqrt{\dfrac{8kT}{m\pi}}$. Отсюда находим $v = v_{кв}\sqrt{\dfrac{8}{3\pi}}$. Итак, получаем выражение для среднего числа столкновений молекул газа в секунду $z = \dfrac{v_{кв}}{l_{cp}}\sqrt{\dfrac{8}{3\pi}}$=9,2 10^7 $с^{-1}$.

Ответ: z =9,2 10^7 $с^{-1}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6. Найти среднюю квадратичную, среднюю арифметическую и наиболее вероятную скорости молекул водорода. Вычисления выполнить для трех значений температуры: 1) T=20 К; 2) T=300 К; 3) T=5000 К. [Ответ:

1) 500 м/с, 462 м/с, 407 м/с; 2) 1,94 км/с, 1,79 км/с, 1,58 км/с; 3) 7,90 км/с, 7,30 км/с, 6,48 км/с]

Задача 7. Смесь гелия и аргона находится при температуре T=1200К. Определить среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона. (Ответ: для гелия: $v_{кв}$=2,73 км/с и w=2,48 10^{-20} Дж; для аргона: $v_{кв}$=864 м/с и w=2,48 10^{-20} Дж.)

Задача 8. Определить среднее значение полной кинетической энергии одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре T=400 К. (Ответ: w(He)=8,28 10^{-21} Дж; w(O)=13,8$\cdot 10^{-21}$ Дж и $w(H_2O)$=16,6$\cdot 10^{-21}$ Дж.)

Задача 9. Колба вместимостью V=4 л содержит некоторый газ массой m=0,6 г под давлением p=200 кПа. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа. (Ответ: $v_{кв}$=2 км/с.)

Задача 10. Найти среднюю длину свободного пробега молекул водорода при давлении p=0,1 Па и температуре T=100 К. (Ответ: $l_{ср}$=4 см)

Задача 11. Найти число N всех соударений, которые происходят в течение t=1 с между всеми молекулами водорода, занимающего при нормальных условиях объем V=1 мм^3. (Ответ: N=2,08 $\cdot 10^{26}$)

Задача 12. Вычислить удельные теплоемкости c_v и c_p газов: 1) гелия, 2) водорода, 3) углекислого газа. (Ответ: 1) 3,12 кДж/(кг К), 5,19 кДж/(кг К), 2) 10,4 кДж/(кг К), 14,6 кДж/(кг К), 3) 567 Дж/(кг К), 756 Дж/(кг К).)

Задача 13. Разность удельных теплоемкостей c_p-c_v некоторого двухатомного газа равна 260 Дж/(кг К). Найти молярную массу μ газа и его удельные теплоемкости c_v и c_p. (Ответ: μ=0,032 кг/моль, c_v =650 Дж/(кгК), c_p =910 Дж/(кг К).)

Задача 14. Каковы удельные теплоемкости c_v и c_p смеси газов, содержащей кислород массой m_1=10 г и азот массой m_2=20 г ? (Ответ: c_v =715 Дж/(кг К) и c_p =1,01 кДж/(кг К).)

Задача 15. Смесь газов состоит из хлора и криптона, взятых при одинаковых условиях и в равных объемах. Определить удельную теплоемкость c_p смеси. (Ответ: c_p =323 Дж/(кг К).)

Тема 9. Первый закон термодинамики. Процессы в газах.

Примеры решения задач

Задача 1. Азот массой 12 г находится в закрытом сосуде объемом 2 л при температуре 10^0С. После нагревания давление в сосуде стало равно 10^4 мм рт.ст. Какое количество тепла было сообщено газу при нагревании?

Решение

Первое начало термодинамики для идеального газа имеет вид $\delta Q=\nu C_v dT+pdV$. По условию задачи процесс изохорический, поэтому это уравнение принимает вид $\delta Q=\nu C_V dT$. Следовательно, $\Delta Q=\nu C_V\Delta T$, где $\Delta T=T-T_0$. Из уравнения состояния после нагревания $pV=\nu RT$, находим конечную температуру газа $T=pV/(\nu R)$. Следовательно, изменение температуры в процессе нагревания равно $\Delta T=\frac{pV}{R\nu}-T_0$. Используя выражения для количества вещества $\nu=m/\mu$ и молярной теплоемкости при постоянном объеме $C_V=\frac{i}{2}R=\frac{5}{2}R$, получаем искомое выражение для количества тепла $\Delta Q=\frac{m}{\mu}\frac{5}{2}R(\frac{pV\mu}{mR}-T_0)$ =4,15 кДж.

Ответ: ΔQ=4,15 кДж.

Задача 2. Кислород массой 10 г находятся под давлением 3 10^5 Па при температуре 10^0 С. После нагревания при постоянном давлении газ занял объем в 10 л. Найти: 1) количество тепла, полученное газом, 2) изменение внутренней энергии газа, 3) работу, совершенную газом при расширении.

Решение

Количество тепла, полученное газом при адиабатическом нагревании, определяется выражением $Q=\frac{m}{\mu}C_p\Delta T$, где $Cp=\frac{i+2}{2}R$ - молярная теплоемкость при постоянном давлении. Из уравнений состояния для исходного $pV_1=\frac{m}{\mu}RT_1$ и конечного $pV_2=\frac{m}{\mu}RT_2$ состояний газа находим:

$$\Delta T=T_2-T_1=\frac{\mu}{mR}p(V_2-\frac{mR}{\mu}\frac{T_1}{p}).$$

Следовательно, для количества тепла, полученного газом, окончательно имеем

$$Q=\frac{i+2}{2}p(V_2-\frac{mRT_1}{\mu p})=7927{,}5 \text{ Дж.}$$

Изменение внутренней энергии находим из выражения

$$\Delta U=\frac{m}{\mu}C_v\Delta T=\frac{i}{2}p(V_2-\frac{mRT_1}{\mu p})=5662{,}5 \text{ Дж.}$$

Наконец работа, совершенная газом при его расширении определяется как:

$$A=p\Delta V=p(V_2-\frac{mRT_1}{\mu p})=2265 \text{ Дж.}$$

Ответ: Q=7927,5 Дж, ΔU=5662,5 Дж и A=2265 Дж.

Задача 3. Какая работа A совершается при изотермическом расширении водорода массой m=5 г, взятого при температуре T=290 К, если объем газа увеличивается в три раза ?

Решение

Элементарная работа, совершаемая газом при его расширении $dA=pdV$. Выразим входящее сюда давление с помощью уравнения состояния $p=\nu RT/V$. Тогда для работы получаем выражение $dA = \nu RT\dfrac{dV}{V}$. Интегрируя это выражение по объему, окончательно получаем:

$$A = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln 3 = 6{,}62\ \text{кДж}.$$

Ответ: A=6,62 кДж.

Задача 4. В цилиндре под поршнем находится водород массой m=0,02 кг при температуре T_1=300 К. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз. Найти температуру T_2 в конце адиабатного расширения и полную работу A, совершенную газом. Изобразить процесс графически.

Решение

Для нахождения температуры в конце адиабатического процесса используем уравнение адиабаты в переменных T и V:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

где γ - показатель адиабаты. Отсюда получаем выражение для температуры T_2:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 n^{1-\gamma} = 157\ \text{К}.$$

Найдем работу, совершаемую газом на отдельных участках процесса. Работа, совершенная газом при адиабатном расширении находится как:

$$A_1 = -\frac{m}{\mu} C_v \Delta T = -\frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R(T_2 - T_1).$$

Работа, совершенная при изотермическом сжатии дается выражением:

$$A_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln\frac{V_1}{V_2} = -\frac{m}{\mu} R T_2 \ln n.$$

Полная работа, совершенная газом, равна алгебраической сумме всех работ. После подстановки численных данных окончательно получаем A=A_1+A_2= -8,7 кДж.

Ответ: A= -8,7 кДж.

Задача 5. Углекислый газ массой 7 г был нагрет на 10 К в условиях свободного расширения. Найти работу расширения газа и изменение его внутренней энергии.

Решение

Изменение внутренней энергии идеального газа определяется выражением

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R \Delta T.$$

Подставляя сюда численные значения, получаем ΔU=33 Дж. Работа расширения газа находится следующим образом:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{\mu} R \int_{T_1}^{T_1 + \Delta T} dT = \frac{m}{\mu} R \Delta T = 13{,}2 \text{ Дж.}$$

Ответ: A=13,2 Дж.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. Азот объемом 2 л находится под давлением 10^5 Па. Какое количество тепла надо сообщить азоту, чтобы: 1) при p=const его объем увеличился вдвое, 2) при V=const его давление увеличилось вдвое ? (Ответ: Q_1=700 Дж; Q_2 =500 Дж.)

Задача 7. Водород массой m=4 г был нагрет на ΔT=10 К при постоянном давлении. Определить работу A расширения газа. (Ответ: A=166,2 Дж.)

Задача 8. Газ, занимавший объем V_1=12 л под давлением p_1=100 кПа, был изобарно нагрет от температуры T_1=300 К до T_2=400 К. Определить работу A расширения газа. (Ответ: A=400 Дж.)

Задача 9. Азот массой m=5 г, нагретый на ΔT=150 К, сохранил неизменный объем V. Найти: 1) количество теплоты Q, сообщенное газу, 2) изменение ΔU внутренней энергии газа, 3) работу A, совершенную газом. (Ответ: Q=556,5 Дж, ΔU=556,5 Дж, A=0.)

Задача 10. Водород занимает объем V_1=10 м^3 при давлении p_1=100 кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления p_2=300 кПа. Определить: 1) изменение внутренней энергии газа, 2) работу, совершенную газом, 3) количество теплоты, сообщенное газу. (Ответ: ΔU =5 МДж, A=0, Q=5 МДж.)

Задача 11. Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему было сообщено количество теплоты Q=21 кДж. Определить работу A, которую совершил при этом газ, и изменение ΔU его внутренней энергии. (Ответ: A=6 кДж, ΔU=15 кДж.)

Задача 12. Азот массой m=200 г расширяется изотермически при температуре T=280 К, причем объем газа увеличивается в два раза. Найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа, 2) совершенную при расширении газа работу A, 3) количество теплоты Q, полученное газом. (Ответ: ΔU=0; A=11,5 кДж; Q=11,5 кДж)

Задача 13. Гелий массой m=1 г был нагрет на ΔT=100 К при постоянном давлении p. Определить: 1) количество теплоты Q, переданное газу; 2) работу A расширения газа; 3) приращение ΔU внутренней энергии газа. (Ответ: Q=520 Дж; A=208 Дж; ΔU=312 Дж.)

Задача 14. При адиабатном расширении кислорода с начальной температурой T_1=320 К внутренняя энергия уменьшилась на ΔU=8,4 кДж, а его объем увеличился в n=10 раз. Определить массу m кислорода. (Ответ: m=67,2 г.)

Задача 15. Воздух, занимавший объем V_1 =10 л при давлении p_1=100 кПа, был адиабатно сжат до объема V_2=1 л. Под каким давлением p_2 находится воздух после сжатия? (Ответ: p_2 =2,52 МПа.)

Тема 10. Цикл Карно. Второй закон термодинамики. Жидкости.

Примеры решения задач

Задача 1. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $7{,}35\cdot10^4$ Дж. Температура нагревателя 100^0 С, температура холодильника 0^0 С. Найти: 1) к.п.д. машины; 2) количество тепла, получаемое машиной за один цикл от нагревателя; 3) количество тепла, отдаваемого за один цикл холодильнику.

Решение

К.п.д. машины рассчитываем $\eta = 1 - T_2/T_1$=0,268. Для η справедливо также выражение $\eta = A/Q_1$, где A - работа, совершаемая за один цикл. Отсюда для количества тепла, получаемого машиной за один цикл, получаем $Q_1 = A/\eta =$ 27,4 10^4 Дж. Находим количество тепла, отдаваемого за один цикл холодильнику $Q_2 = Q_1 - A =$ 2 10^5 Дж.

Ответ: η=0,268, Q_1=$27{,}4\cdot10^4$ Дж, Q_2=2 10^5 Дж.

Задача 2. Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа A_1 изотермического расширения газа равна 5 Дж. Определить работу A_2 изотермического сжатия, если термический к.п.д. цикла η=0,2.

Решение

Из выражения для термического к.п.д. $\eta = 1 - T_2/T_1$ находим температуру холодильника $T_2 = (1-\eta)T_1$. Используем выражения для работы газа при изотермических процессах:

$$A_1 = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \quad \text{и} \quad A_2 = \nu R T_2 \ln\frac{V_3}{V_4}.$$

В этих выражениях процесс 1-2 соответствует изотермическому расширению, процесс 2-3 - адиабатическому расширению, процесс 3-4 - изотермическому сжатию, процесс 4-1 - адиабатическому сжатию. Используя связь между начальными и конечными значениями параметров состояния газа при адиабатных процессах:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} \quad \text{и} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1},$$

получаем, что $\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1}$. Следовательно, справедливо $\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4}$. Отсюда находим $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Учитывая полученные выражения, для искомой работы получаем:

$$A_2 = \nu R T_2 \ln\frac{V_3}{V_4} = \nu R(1-\eta)T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = A_1(1-\eta) = 4 \text{ Дж}.$$

Ответ: A_2 =4 Дж.

Задача 3. Найти изменение энтропии при переходе 8 г кислорода от объема в 10 л при температуре 80^0 С к объему в 40 л при температуре 300^0 С.

Решение

Выражение для элементарного изменения энтропии идеального газа имеет вид

$$dS = \frac{dQ}{T} = \nu C_v \frac{dT}{T} + \frac{pdV}{T} = \nu C_v \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V},$$

где давление p исключено с помощью уравнения состояния $p = \nu RT/V$. Для нахождения искомого изменения энтропии надо проинтегрировать последнее выражение по всему диапазону изменения температуры. Сделав это, получаем:

$$\Delta S = \nu C_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \nu R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = 5{,}4 \text{Дж/К}.$$

Ответ: ΔS=5,4 Дж/К.

Задача 4. На сколько нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель радиусом r=1 мм каждая?

Решение

Поверхностный слой жидкости находится в состоянии натяжения и обладает запасом потенциальной энергии. Отношение изменения этой потенциальной энергии к изменению площади поверхности $\sigma = \Delta E / \Delta S$ называется коэффициентом поверхностного натяжения. Следовательно, выделение энергии при слиянии двух капель ртути $\Delta E = \sigma \Delta S$, где $\Delta S = 8\pi r^2 - 4\pi R^2$ и R - радиус большой капли. Суммарный объем двух маленьких капель равен объему большой капли: $2\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Отсюда получаем $R = r 2^{1/3}$. Тогда изменение площади $\Delta S = 4\pi r^2 (2 - 4^{1/3})$ и изменение энергии $\Delta E = \sigma \Delta S = \sigma 4\pi r^2 (2 - 4^{1/3})$. Выделенная энергия идет на нагревание капли $\Delta E = cm\Delta T = c\rho \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta T = c\rho \frac{8}{3}\pi r^3 \Delta T$, где c - удельная теплоемкость ртути, ρ - ее плотность, m - масса. Приравнивая выражения для энергии $\sigma 4\pi r^2(2-4^{1/3}) = c\rho\frac{8}{3}\pi r^3\Delta T$, получаем для изменения температуры следующую формулу:

$$\Delta T = \frac{3\sigma(2-4^{1/3})}{2cr\rho} = 1{,}65\cdot 10^{-4}\text{ К}$$

При расчете использованы табличные значения для ртути: плотность ρ=13,6 г/см^3, коэффициент поверхностного натяжения σ=0,5 Н/м, удельная теплоемкость c=138 Дж/(кг К).

Ответ: ΔT=1,65$\cdot$10^{-4} К.

Задача 5. Определить давление воздуха (в мм рт. ст.) в воздушном пузырьке диаметром d=0,01 мм, находящемся на глубине h=20 см под поверхностью воды. Внешнее давление принять равным p_1=765 мм рт. ст.

Решение

Добавочное давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа (для сферической поверхности): $p=2\sigma/R$, где R - радиус сферы (для воды σ=73 10^{-3} Н/м). Давление воздуха в пузырьке складывается из атмосферного давления, гидростатического давления воды на глубине h и добавочного давления, вызванного кривизной поверхности, и находится по формуле:

$$p = p_1 + \rho g h + \frac{2\sigma}{r} = 999 \text{ мм рт. ст.}$$

Ответ: p=999 мм рт. ст.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. Совершая замкнутый процесс, газ получает от нагревателя количество теплоты Q_1=4 кДж. Определить работу A газа при протекании цикла, если его термический к.п.д. η= 0,1. (Ответ: A=400 Дж.)

Задача 7. В результате кругового процесса газ совершил работу A=1 Дж и передал охладителю количество теплоты

Q_2=4,2 Дж. Определить термический к. п. д. цикла. (Ответ η=0,19.)

Задача 8. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 2/3 количества теплоты Q_1, полученного от нагревателя, отдает охладителю. Температура T_2 охладителя равна 280 К. Определить температуру T_1 нагревателя. (Ответ: T_1 =420 К)

Задача 9. Наименьший объем V_1 газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем V_3 , если объем V_2 в конце изотермического расширения и объем V_4 в конце изотермического сжатия равны соответственно 600 л и 189 л. (Ответ: V_3 = 740 л.)

Задача 10. В результате изохорного нагревания водорода массой m=1 г давление p газа увеличилось в два раза. Определить изменение ΔS энтропии газа. (Ответ: ΔS=7,2 Дж/К.)

Задача 11. Найти изменение ΔS энтропии при изобарном расширении азота массой m=4 г от объема в 5 л до объема в 9 л. (Ответ: ΔS=2,44 Дж/К.)

Задача 12. Водород массой 6,6 г расширяется изобарно до удвоенного объема. Найти изменение энтропии при этом расширении. (Ответ: ΔS=66,3 Дж/К.)

Задача 13. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы разбить сферическую каплю ртути радиусом 3 мм на две одинаковых капли? (Ответ: A= 1,47 10^{-5} Дж.)

Задача 14. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы выдуть мыльный (σ=0,043 Н/м) пузырь диаметром 4 см? (Ответ: A= $4{,}32\cdot10^{-4}$ Дж.)

Задача 15. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на 1 мм рт. ст. больше атмосферного. Чему равен диаметр пузыря? (Ответ: d=2,6 мм.)

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ

Физическая постоянная	Обозна-чение	Значение
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	γ	$6{,}67\cdot10^{-11}$ м^2/(кг с^2)
Число Авогадро	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль К)
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3{,}00\cdot10^{8}$ м/с
Постоянная закона Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2 К^4)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2{,}90\cdot10^{-8}$ м К
Постоянная Планка	h	$6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж с
Постоянная Планка, деленная на 2π	$\hbar$	$1{,}054\cdot10^{-34}$ Дж с
Постоянная Ридберга	R	$1{,}097\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	a_0	$0{,}529\cdot10^{-10}$ м
Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927\cdot10^{-23}$ А м^2
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18\cdot10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Атомная единица массы	а. е. м.	$1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Коэффициент пропорциональности между энергией и массой	c^2	$9{,}00\cdot10^{16}$ Дж/кг (931 МэВ/а. е. м.)

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Физические основы механики

ВВЕДЕНИЕ. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. Механическое движение. Системы отсчета. Материальная точка. Траектория. Перемещение и путь. Скорость и ускорение. Тангенциальное и нормальное ускорения. Движение материальной точки по окружности. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения.

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Взаимодействие тел. Сила, масса. Второй закон Ньютона. Импульс. Третий закон Ньютона. Изолированная система материальных тел. Закон сохранения импульса. Преобразования Галилея. Границы применения классической механики.

Работа. Работа переменной силы. Мощность. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Связь между силой и потенциальной энергией. Энергия упруго деформированного тела. Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии в механике.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. Понятие абсолютно твердого тела. Поступательное и вращательное движение тела. Момент силы. Момент импульса. Момент инерции. Вычисление момента инерции простейших тел (шар, диск, стержень). Основной закон динамики вращательного движения. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. Периодические движения. Гармонические колебания. Квазиупругие силы. Гармонический осциллятор. Уравнение гармонических колебаний. Основные характеристики колебательного движения: амплитуда, фаза, частота, период. Сложение колебаний. Математический и физический маятники. Кинетическая, потенциальная и полная энергия гармонического колебания. Затухающие колебания. Вынужденные колебания. Резонанс.

Молекулярная физика и термодинамика

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ.

Молекулярно-кинетический и термодинамический методы изучения макроскопических явлений. Тепловое движение молекул. Броуновское движение. Взаимодействие молекул. Параметры системы. Равновесные и неравновесные процессы.

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. Идеальный газ как молекулярно-кинетическая модель реальных газов. Давление идеального газа. Средняя кинетическая энергия поступательного движения одноатомной молекулы и её связь с температурой. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов и его следствия. Уравнение Менделеева-Клапейрона. Уравнения изопроцессов. Закон Дальтона.

Распределение молекул газа по скоростям. Функция распределения. Распределение Максвелла. График распределения Максвелла. Наиболее вероятная, средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости молекул. Столкновение между молекулами. Средняя длина свободного пробега.

ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ. Число степеней свободы и средняя энергия многоатомной молекулы. Внутренняя энергия идеального газа. Первое начало термодинамики. Работа газа при изменении объема. Работа газа при различных изопроцессах. Теплоёмкость. Теплоёмкость идеального газа при постоянном объеме и при постоянном давлении. Уравнение Майера. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона. Второе начало термодинамики. Тепловой двигатель. Круговые процессы. Цикл Карно, к.п.д. цикла Карно.

РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ. Отступления от законов идеального газа. Взаимодействие молекул. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы Ван-дер-Ваальса. Сравнение изотерм Ван-дер-Ваальса с изотермами, полученными экспериментально.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова Т. И. Курс физики. - М.: Высшая школа, 1990.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. - М.: Наука, тт 1, 2, 1987.
3. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. - М.: Высшая школа, 1988.
4. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. - М.: Наука, 1980.
5. Прудников В. Н., Прудникова Н. А. Пособие по физике. - М: МГУ, 1985.

СОДЕРЖАНИЕ