ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗО-
ВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Москва 2007

ББК 22.23
Ф 45
УДК 537 (076)

Рецензенты: д. ф-м н. В.А. Твердислов, к. ф-м н. Т.В. Юрова

Редактор:

Э 45: И. А. Анищенко, А. А. Задерновский, М. М. Зверев, Б. В.Магницкий, Ю. К. Фетисов, А.Ю. Пыркин., Л. В. Соломатина. Электричество и магнетизм. Учебное пособие по решению задач по физике для студентов вечернего отделения. /Моск. гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) -М., 2007. - 68с.

ISBN 5-7339-0027-X

Учебное пособие предназначено для студентов вечернего отделения, изучающих вторую часть курса общей физики «Электричество и магнетизм». Пособие содержит основные формулы, используемые при решении задач, 50 задач с решениями, 100 задач для самостоятельного решения, таблицу основных физических постоянных, вопросы для подготовки к экзамену и список рекомендуемой литературы. Учебный материал соответствует программе курса общей физики, изучаемого в технических вузах.

Табл. 1. Ил. 31. Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технический университет).

ВВЕДЕНИЕ

В основу принятой в Московском государственном институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА) системы обучения положена фундаментальная подготовка студентов на младших курсах в сочетании с производственным обучением на старших курсах. При этом, одной из важнейших дисциплин в теоретической и практической подготовке современного инженера является курс физики. Студенты всех специальностей изучают физику в расширенном объеме при углубленном преподавании специальных разделов.

Предлагаемое учебное пособие по решению задач по второй части курса физики "Электричество и магнетизм" предназначено для студентов всех специальностей, обучающихся на вечернем отделении МИРЭА.

Необходимость издания данного пособия связана с тем, что обучение студентов-вечерников имеет свои особенности, однако до сих пор в литературе не существовало ни одного учебного пособия для этой категории студентов. Существующие пособия, например, для студентов-заочников, рассчитаны на практически самостоятельную подготовку студентов, что не соответствует специфике обучения вечерников. Кроме того, новые достижения науки достаточно быстро становятся достоянием учебного процесса, что делает необходимым постоянное обновление задач и введение новых задач.

Материал учебного пособия по второй части курса физики содержит: основные формулы, используемые при решении задач, подробное решение 50 типовых задач, 100 задач с ответами для практических занятий, таблицу основных физических постоянных, вопросы для подготовки к экзамену и список рекомендуемой учебной литературы.

При составлении и подборе задач для учебного пособия учтена специфика специальностей, по которым ведется подготовка инженеров в МИРЭА. При этом авторы использовали как свои, оригинальные задачи, так и наиболее удачные задачи из ряда учебно-методических пособий и сборников задач, например таких, как: Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. -М.:

Высшая школа, 1988; Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. -М .:Наука, 1980. Прудников В.Н., Прудникова Н.А. Пособие по физике. - М.: МГУ, 1985.

Авторы выражают глубокую благодарность преподавателям кафедры физики МИРЭА, принявшим участие в анализе задач и сделавшим ценные замечания при прочтении рукописи.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

- Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

где F - сила взаимодействия точечных зарядов Q_1 и Q_2 , r - расстояние между зарядами, ε - диэлектрическая проницаемость, ε_0 - электрическая постоянная.

- Напряженность электрического поля и потенциал:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/Q, \quad \varphi = \Pi/Q,$$

где Π- потенциальная энергия точечного положительного заряда Q, находящегося в данной точке поля (при условии, что потенциальная энергия заряда, удаленного в бесконечность, равна нулю).

- Сила, действующая на точечный заряд, находящийся в электрическом поле, и потенциальная энергия этого заряда:

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}, \quad \Pi = Q\,\varphi.$$

- Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов (принцип суперпозиции электрических полей):

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}_i, \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i$$

где $\boldsymbol{E_i}$, φ_i - напряженность и потенциал в данной точке поля, создаваемые i-м зарядом.

- Напряженность и потенциал поля, создаваемого точечным зарядом:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r^2}, \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varepsilon r},$$

где r - расстояние от заряда Q до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

- Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей сферой радиусом R с зарядом Q на расстоянии r от центра сферы:

а) $E = 0, \quad \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$ (при $r < R$),

б) $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}, \quad \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$ (при $r = R$),

в) $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, \quad \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ (при $r > R$),

- Линейная плотность заряда:

$$\rho = \frac{dQ}{dl}$$

- Поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}$$

- Поток вектора напряженности **E** электрического роля через замкнутую поверхность S, помещенную в неоднородное электрическое поле:

$$\Phi_E = \oint_S E_n ds$$

где E_n - проекция вектора напряженности электрического поля на нормаль к поверхности.

- Теорема Остроградского-Гаусса. Поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды Q_1, Q_2, ……, Q_n:

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i$$

- Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной прямой линией или бесконечно длинным цилиндром:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon r},$$

где r - расстояние от нити или оси цилиндра до точки, напряженность поля в которой вычисляется.

- Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

- Связь потенциала поля с напряженностью поля:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi$$

- Электрический момент диполя:

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

где Q - заряд; $\boldsymbol{l}$ **-** плечо диполя (векторная величина, направленная от отрицательного заряда к положительному и численно равная расстоянию между зарядами).

- Механический (вращательный) момент сил, действующий на диполь с электрическим моментом $\boldsymbol{p}$, помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью $\boldsymbol{E}$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\ \mathbf{E}] \quad \text{или} \quad \mathrm{M} = \mathrm{pE}\sin\alpha,$$

где α- угол между направлениями векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{E}$**.**

- Работа сил поля по перемещению заряда Q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2:

$$A_{12} = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

- Электроемкость проводника и конденсатора:

$$C_{проводника} = Q/\varphi \quad \text{или} \quad C_{конденсатора} = Q/U,$$

где φ - потенциал проводника (при условии, что в бесконечности потенциал проводника принимается равным нулю), U - разность потенциалов пластин конденсатора.

- Электроемкость уединенной проводящей сферы радиусом R:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R,$$

- Электроемкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S - площадь пластины (одной) конденсатора, d - расстояние между пластинами.

- Электроемкость батареи, состоящей из N конденсаторов:

а) $\dfrac{1}{C} = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{Ci}$ (при последовательном соединении);

б) $C = \sum_{i=1}^{N} C_i$ (при параллельном соединении).

- Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

- Связь поляризованности ***P*** с напряженностью ***E*** среднего макроскопического поля в диэлектрике:

$$\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$$

χ - диэлектрическая восприимчивость.

- Связь между вектором индукции ***D*** и вектором напряженности ***E*** электрического поля в однородных диэлектриках:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- **С**вязь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ:

$$\varepsilon = 1 + \chi$$

- Связь между поверхностной плотностью связанных зарядов σ' и нормальной составляющей вектора поляризованности P_n**:**

$$\sigma' = P_n$$

- Объемная плотность энергии электростатического поля:

$$\omega = \frac{ED}{2} \text{ или } \omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

- Сила электрического тока:

$$I = \frac{dQ}{dt},$$

где Q -заряд, прошедший через поперечное сечение проводника, t - время.

- Плотность электрического тока тока:

$$j = \frac{dI}{ds} = en\langle v\rangle,$$

где S - площадь поперечного сечения проводника, e - заряд частицы, n-концентрация частиц, v - скорость направленного движения частиц.

- Закон Ома для участка цепи, содержащей э.д.с. :

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm E}{R},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ - разность потенциалов (напряжение) на концах участка цепи, Е - э.д.с. источника тока, R - полное сопротивление участка цепи.

- Законы Кирхгофа;

а) $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$ (первый закон),

б) $\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{j=1}^{m} E_j$ (второй закон),

где $\sum_{i=1}^{n} I_i$ - алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле; $\sum_{i=1}^{n} I_i R_i$ - алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления участков, $\sum_{j=1}^{m} E_j$ - алгебраическая сумма э.д.с.

- Сопротивление R и проводимость G проводника:

$$R = \rho\, l/S, \quad G = \gamma S/l,$$

Где ρ удельное сопротивление, γ - удельная проводимость, l - длина проводника, S - площадь поперечного сечения проводника.

- Сопротивление системы проводников:

а) $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$ (при последовательном соединении),

б) $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$ (при параллельном соединении),

где R_i - сопротивление i-го проводника.

- Работа тока:

$$A = IU\,t = I^2 R\,t = U^2 t/R.$$

- Мощность тока:

$$P = IU = I^2 R = U^2/R.$$

- Законы Ома и Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E}, \quad \omega = \gamma E^2,$$

где γ - удельная проводимость, $\boldsymbol{E}$- напряженность электрического поля,

j - плотность тока, ω - плотность мощности, выделяемой в проводнике.

- Связь магнитной индукции ***B*** с напряженностью ***H*** магнитного поля:

$$B = \mu\mu_0 H$$

где μ - магнитная проницаемость изотропной среды, μ_0 - магнитная постоянная. В вакууме μ=1, в парамагнетике μ>1, в диамагнетике μ<1, в ферромагнетике μ= μ (*H*)>>1.

- Закон Био-Савара-Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\left[d\mathbf{lr}\right]\frac{I}{r^3} \quad \text{или} \quad dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha}{r^2}dl$$

где dB - индукция магнитного поля, создаваемого элементом проводника длиной dl с током I, ***r*** **-** радиус-вектор, направленный от элемента проводника к точке, в которой определяется индукция, α- угол между радиус-вектором и направлением тока в элементе проводника.

- Магнитная индукция на оси кругового тока:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

где h - расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

- Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

где r_0 -расстояние от оси проводника до точки, в которой определяется магнитная индукция; α_1 и α_2 - углы между направлением тока и радиус векторами, проведенными из концов проводника в точку наблюдения.

- Магнитная индукция поля длинного соленоида:

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

- Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле (закон Ампера):

$$d\boldsymbol{F} = I[d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{B}] \quad \text{или} \quad dF = Ibdl\sin\alpha,$$

где dl - длина элемента проводника, α - угол между направлением тока в проводнике и вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B}$.

- Магнитный момент плоского контура с током:

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{n}IS,$$

где $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор нормали (положительной) к плоскости контура, I - сила тока, проходящего по контуру; S - площадь контура.

- Механический (вращательный) момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{B}] \quad \text{или} \quad M = p_{\mathrm{m}}B\sin\alpha,$$

Где α - угол между векторами $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ и $\boldsymbol{B}$.

- Потенциальная энергия (механическая) контура с током в маг-нитном поле:

$$\Pi_{\text{мех}} = -\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{B} \quad \text{или} \quad \Pi_{\text{мех}} = -p_{\mathrm{m}}B\cos\alpha.$$

- Отношение магнитного момента p_{m} к механическому L (моменту импульса) заряженной частицы, движущейся по круговой орбите:

$$\frac{p_m}{L} = \frac{1}{2}\frac{Q}{m},$$

где Q - заряд частицы, m - масса частицы.

- Сила Лоренца:

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} + Q[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}],$$

где Q - заряд частицы. $\boldsymbol{v}$ - скорость частицы, $\boldsymbol{E}$ - вектор напряженности электрического поля, $\boldsymbol{B}$ - вектор магнитной индукции,

- Магнитный поток:

$\Phi = \int\limits_S B_n\, dS$ (интегрирование ведется по всей поверхности).

В случае однородного поля и плоской поверхности:

$$\Phi = BS\cos\alpha \quad \text{или} \quad \Phi = B_{\mathrm{n}}\,S,$$

где S - площадь контура, α- угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции.

- Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле:

$$A = I\Delta\Phi.$$

- Э.д.с. индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где Ψ - потокосцепление (полный поток через N контуров).

- Э.д.с. индукции, возникающая при движении проводника в магнитном поле:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Ф - магнитный поток через площадку, описываемую проводником в магнитном поле.

- Заряд, протекающий по замкнутому контуру при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$Q = \Delta\Phi/ R \quad \text{или} \quad Q = N\Delta\Phi/ R = \Delta\Psi/ R,$$

где R - сопротивление проводника.

- Индуктивность контура:

$$L = \Psi/ I.$$

- Э.д.с. самоиндукции:

$$\mathrm{E_s} = - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{dt}}.$$

- Индуктивность соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где n - число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, V - объем соленоида.

- Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротив-лением R и индуктивностью L:

а) $I = \dfrac{\mathrm{E}}{R}(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L})$ (при замыкании цепи),

где Е - э.д.с. источника тока, t - время, прошедшее после замыкания цепи;

б) $I = I_0\,\mathrm{e}^{-Rt/L}$ (при размыкании цепи),

где I_0 - сила тока в цепи при t=0, t - время, прошедшее с момента размыкания цепи.

- Энергия магнитного поля соленоида:

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

- Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия магнитного поля, сосредоточенная в единице объема):

$$\omega = \boldsymbol{BH}/2 \qquad \text{или} \qquad \omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

где B - магнитная индукция, H - напряженность магнитного поля.

- Период собственных колебаний в контуре без активного сопротивления (формула Томсона):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\ ,$$

где L - индуктивность контура, C - электроемкость контура.

- Добротность колебательного контура в случае малого затухания ($((R/2L)^2 << \omega_0^2$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - собственная частота контура):

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\ .$$

- Связь длины λ, периода T и частоты ω электромагнитной волны:

$$\lambda = cT, \qquad \lambda = 2\pi\, c/\omega$$

где c - скорость электромагнитной волны в вакууме (c = $3 \cdot 10^8$ м/с).

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ.

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	γ	$6{,}67\cdot10^{-11}$ м^2/(кг·с^2)
Число Авогадро	N_A	$6.02\cdot10^{23}$моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	$8.31\,\frac{Дж}{Моль*К}$
Постоянная Больцмана	K	$1.38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	E	$1.6\cdot10^{-19}$Кл
Скорость света в вакууме	C	$3\cdot10^{8}$ м/с
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$1{,}257\cdot10^{-6}$ Гн/м
Постоянная закона Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$Вт/(м^2·К^4)
Постоянная закона смещения Вина	B	$2.90\cdot10^{-3}$м·К
Постоянная Планка	h	$6.63.10^{-34}$Дж·с
Постоянная Планка, деленная на 2π	$\hbar$	$1{,}054\cdot10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	R	$1{,}097\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	a_0	$0{,}529\cdot10^{-10}$ м
Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927\cdot10^{-23}$ А·м^2
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18\cdot10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Атомная единица массы	а. е. м.	$1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Масса электрона	m_e	$9{,}1\cdot10^{-31}$ кг
Масса протона	m_p	$1{,}672\cdot10^{-27}$ кг
Коэффициент пропорциональности между энергией и массой	c^2	$9{,}00\cdot10^{16}$ Дж/кг (931 МэВ/а.е.м

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова Т. И. Курс физики, М.: Высшая школа, 1990.

2. Савельев И. В. Курс общей физики, М.: Наука, тт. 2, 3, 1987.

3. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике, М.: Высшая школа, 1988.

4. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики, М.:

Наука, 1980.

5.Прудников В. Н., Прудникова Н. А. Пособие по физике, М: МГУ, 1985.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

Электростатика. Постоянный электрический ток.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. Электрические свойства тел. Элементарный заряд. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Электрическая постоянная. Электрическое поле. Напряженность поля. Принцип суперпозиции полей. Силовые линии поля. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса. Вычисление напряженности поля различных заряженных тел.

Работа сил электрического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряженности. Потенциал. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом. Потенциал поля точечного заряда. Электрическое поле внутри заряженного проводника. Распределение зарядов в проводниках.

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. Проводники в электрическом поле. Электроемкость проводников. Конденсаторы. Соединение конденсаторов. Энергия системы зарядов. Энергия заряженного проводника. Энергия заряженного конденсатора. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ. Свободные и связанные заряды. Электрический диполь. Электрический момент диполя. Диполь в однородном электрическом поле. Полярные и неполярные молекулы. Поляризация диэлектриков. Поляризованность (вектор поляризации). Электрическое смещение.

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. Электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Источники тока. Электродвижущая сила (э.д.с.). Закон Ома для полной цепи. Закон Ома для участка цепи, содержащего э.д.с. Разветвленные цепи. Законы Кирхгофа. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

Электромагнетизм. Электромагнитные колебания и волны.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Закон Ампера. Магнитная индукция. Силовые линии магнитного поля. Магнитная постоянная. Магнитное поле движущихся зарядов. Сила Лоренца.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ. Закон Био-Савара-Лапласа для элемента тока. Поле прямолинейного и кругового токов. Магнитный момент кругового тока. Циркуляция вектора магнитной индукции. Магнитное поле соленоида. Магнитный поток. Работа перемещения контура с током в магнитном поле. Поведение магнитного момента в однородном магнитном поле.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле. Эффект Холла. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями. Масс-спектрометры. Ускорение заряженных частиц. Элементы электронной оптики.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. Взаимодействие магнитного поля с веществом. Понятие об элементарных токах. Элементарный ток в магнитном поле. Намагничивание вещества. Намагниченность. Магнитная восприимчивость. Магнитная проницаемость. Напряженность магнитного поля.

МАГНЕТИКИ. Деление веществ на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Диамагнетизм. Парамагнетизм. Зависимость магнитной восприимчивости от температуры. Ферромагнетизм. Домены. Гистерезис. Точка Кюри.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. Возникновение электрического поля при изменении магнитного поля. Индукционный ток. Правило Ленца. Э.д.с. индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Явление самоиндукции. Индуктивность. Энергия магнитного поля соленоида. Плотность энергии магнитного поля.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ. Переменный ток. Индуктивность и емкость в цепи переменного тока. Колебательный контур. Основное уравнение колебательного контура. Собственные колебания контура. Формула Томсона. Реактивное сопротивление в цепи переменного тока. Затухающие колебания. Уравнение для затухающих колебаний. Э.д.с. в колебательном контуре. Уравнение вынужденных колебаний. Явление резонанса.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. Основные экспериментальные соотношения, используемые при написании уравнений Максвелла. Уравнение Максвелла для стационарных полей. Обобщение закона электромагнитной индукции Фарадея. Ток смещения. Система уравнений Максвелла в интегральной форме для произвольных полей.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. Волновое уравнение. Плоская электромагнитная волна. Скорость распространения электромагнитных волн. Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Умова-Пойнтинга. Экспериментальное исследование электромагнитных волн. Шкала электромагнитных волн.

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН. Международная система единиц (СИ). Определение единицы силы тока в СИ. Электродинамические постоянные.

РАЗДЕЛ III. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

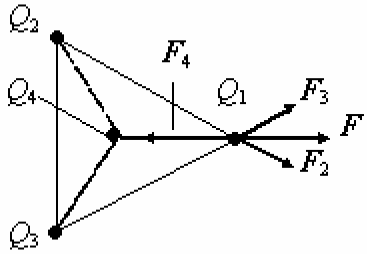
Тема 1. Электростатическое поле в вакууме. Напряженность поля. Теорема Гаусса.

Примеры решения задач

Задача 1. Три одинаковых положительных заряда Q_1=Q_2=Q_3=1 нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд Q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Решение:

Схема расположения зарядов показана на рисунке. Все три заряда, расположенных в вершинах треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд Q_4 следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех положительных зарядов, например Q_1, находился в равновесии. В соответствии с принципом суперпозиции, на заряд Q_1 действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд Q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю:



$$\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_4 = 0, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$ - силы, с которыми действуют на заряд Q_1 заряды Q_2, Q_3, и Q_4; $\boldsymbol{F}$ - равнодействующая сил $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$.

Так как силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_4$ направлены по одной прямой, то векторное равенство (1) можно заменить скалярной суммой:

$F - F_4 = 0$ или $F_4 = F$.

Выразим в последнем равенстве F через F_2 и F_3. Учитывая, что $F_2=F_3$, получим $F=2F_2\cos(\alpha/2)$. Так как $\cos^2(\alpha/2)=(1/2)(1+\cos\alpha)$, то имеем:

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Применяя закон Кулона, согласно которому $F_2 = \dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $F_4 = \dfrac{Q_1Q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$, и имея в виду, что $Q_2=Q_3=Q_1$, найдем:

$$\frac{Q_1Q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,. \quad (2)$$

Отсюда получаем выражение для величины заряда Q_4:

$$Q_4 = \frac{Q_1 r_1^2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}{r^2}\,.$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что $\cos\alpha=1/2$, $r_1 = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$. С учетом этого, формула (2) примет следующий вид

$Q_4=Q_1\ /\sqrt{3}$. Подставив сюда значение Q_1, получаем, что Q_4=0,58 нКл.

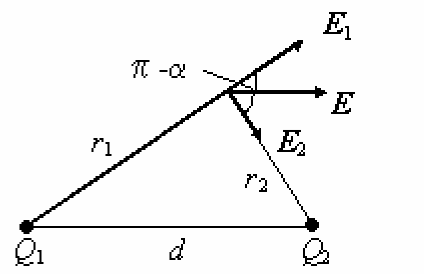
Ответ: Q_4=0,58 нКл.

Задача 2. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами Q_1=30 нКл и Q_2= -10 нКл. Расстояние d между зарядами равно 20 см. Определить напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии r_1=15 см от первого и на расстоянии r_2=10 см от второго зарядов.

Решение:

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$, как показано на рисунке.

Напряженности электрических полей, создаваемых в вакууме первым и вторым зарядами,



равны: $E_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$; $E_2 = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$

(1)

Вектор $\boldsymbol{E}_1$ направлен по силовой линии от заряда Q_1, так как заряд Q_1>0; вектор $\boldsymbol{E}_2$ направлен также вдоль силовой линии, но к заряду Q_2, так как Q_2<0. Модуль вектора E найдем по теореме косинусов:

$$E=\sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}\ ,$$

(2)

где угол α может быть найден из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}\ .$$

Подставляя выражения для E_1 и E_2 из формул (1) в равенство (2), получаем:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{Q_1Q_2}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha} = 16.7 \text{ кВ/м.}$$

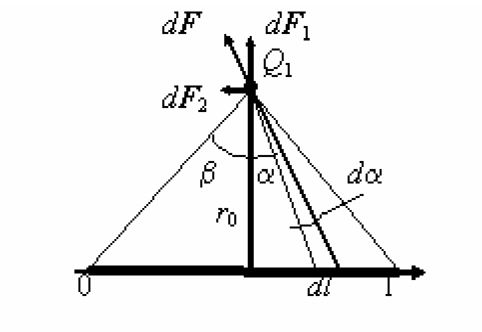
Ответ: E=16,7 кВ/м.

Задача 3. Тонкий стержень длиной L=30 см несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью τ=1 мкКл/м. На расстоянии r_0=20 см от стержня находится заряд Q_1=10 нКл, равноудаленный от концов стержня. Определить силу F взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

Решение:

Закон Кулона позволяет вычислить силу взаимодействия двух точечных зарядов. По условию задачи, один из зарядов не является точечным, а представляет собой заряд, равномерно распределенный по длине стержня.

Однако, если выделить на стержне бесконечно малый участок длиной dl, как показано на рисунке, то находящийся на нем заряд $dQ=\tau dl$ можно рассматривать как точечный. Тогда, по закону Кулона, силу взаимодействия между зарядами Q_1 и dQ можно записать в виде:



$$dF=\frac{Q_1\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (1)$$

где r - расстояние от выделенного участка стержня до заряда Q_1.

Из рисунка следует, что $r=\frac{r_0}{\cos\alpha}$ и $dl=\frac{r d\alpha}{\cos\alpha}$, где r_0 - расстояние от заряда Q_1 до стержня. Подставив выражения для r и dl в формулу (1), получим:

$$dF=\frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}d\alpha\,. \qquad (2)$$

Следует иметь в виду, что $d\boldsymbol{F}$ это вектор, поэтому, прежде чем интегрировать, разложим его на две составляющие: $d\boldsymbol{F}_1$, перпендикулярную стержню, и $d\boldsymbol{F}_2$, параллельную стержню. Из рисунка также видно, что $dF_1=dF\cdot\cos\alpha$ и $dF_2=dF\cdot\sin\alpha$. Подставляя значение dF из выражения (2) в эти формулы, найдем:

$$dF_1=\frac{Q_1\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}d\alpha \quad \text{и} \quad dF_2=\frac{Q_1\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0}d\alpha\,.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от $-\beta$ до $+\beta$ (см. рисунок), получим:

$$F_1=\frac{Q\tau\sin\beta}{2\pi\varepsilon_0 r_0}; \quad F_2=0.$$

Интегрирование второго выражения дает нуль в силу симметрии расположения заряда Q_1 относительно стержня.

Таким образом, сила, действующая на заряд Q_1, равна:

$$F = F_1 = \frac{Q_1 \tau \sin\beta}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \, . \qquad (3)$$

Из рисунка следует, что:

$$sin\beta = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}} \, . \qquad (4)$$

Подставив равенство (4) в формулу (3), получим окончательно:

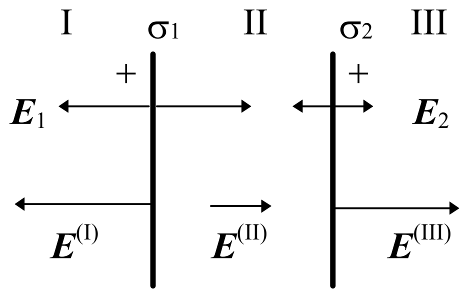
$$F = \frac{Q_1 \cdot \tau \cdot l}{2\pi\varepsilon_0 r_0 \sqrt{4r_0^2 + l^2}} = 0.54 \text{ мН.}$$

Ответ: F=0,54 мН.

Задача 4. Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными заряженными плоскостями с поверхностными плоскостями заряда σ_1=0,4 мкКл/м^2 и σ_2=0,1 мкКл/м^2. Определить напряженность электрического поля, созданного этими заряженными плоскостями.

Решение:

Согласно принципу суперпозиции, поля, создаваемые каждой заряженной плоскостью в отдельности, накладываются друг на друга, причем каждая заряженная плоскость создает электрическое поле независимо от присутствия другой заряженной плоскости. Напряженности однородных электрических полей, создаваемых первой и второй плоскостями, соответственно, равны:



$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$ и $E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$.

Плоскости делят все пространство на три области: (I), (II) и (III), как показано на рисунке. Так как обе плоскости заряжены положительно, то в первой и третьей областях электрические силовые линии обоих полей направлены в одну сторону и, следовательно, напряженности суммарных полей $E^{(I)}$ и $E^{(III)}$ в первой и третьей областях равны между собой и равны сумме напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E^{(I)} = E^{(III)} = E_1 + E_2 \quad \text{или} \quad E^{(I)} = E^{(III)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} = 28{,}3 \text{ кВ/м}.$$

Во второй области (между плоскостями) электрические силовые линии полей направлены в противоположные стороны и, следовательно, напряженность поля $E^{(II)}$ равна разности напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E^{(II)} = \left| E_1 - E_2 \right| \quad \text{или} \quad E^{(II)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} = 17 \text{ кВ/м}.$$

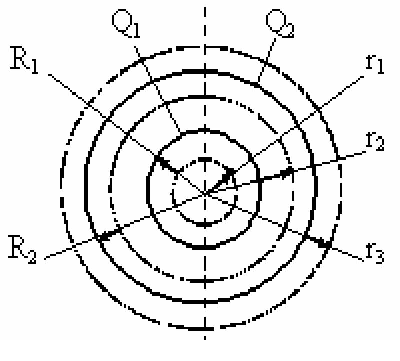
На рисунке указаны направления электрических полей $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, и $\boldsymbol{E}$, создаваемых, соответственно, первой плоскостью, второй плоскостью и двумя плоскостями вместе.

Ответ: $E^{(I)} = E^{(III)} = 28{,}3$ кВ/м; $E^{(II)} = 17$ кВ/м.

Задача 5. Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1=6.см и R_2=10 см несут, соответственно, заряды Q_1=1 нКл и Q_2= -0,5 нКл. Найти напряженность поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях r_1=5 см, r_2=9 см и r_3 =15 см. Построить график зависимости напряженности поля от расстояния $E(r)$.

Решение:

Геометрия задачи показана на рисунке. Точки, в которых требуется найти напряженности электрического поля, лежат в трех областях: область I ($r<R_1$), область II ($R_1<r<R_2$) и область III ($r>R_2$).



1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем сферическую поверхность S_1 радиусом r_1 и воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса. Так как внутри области I зарядов нет, то, согласно указанной теореме, получим равенство:

$$\oint_S E_n dS = 0, \qquad (1)$$

где E_n - нормальная составляющая напряженности электрического поля. Из соображений симметрии следует, что нормальная составляющая E_n должна быть равна самой напряженности и постоянна для всех точек сферы, т. е. E_n=E_1=const. Поэтому, её можно вынести за знак интеграла. Равенство (1) примет вид $E_1\oint_S dS = 0$. Так как площадь сферы не равна нулю, то E_1=0. Напряженность поля будет равна нулю во всех точках, удовлетворяющих условию $r<R_1$.

2. В области II сферическую поверхность проведем радиусом r_2. Так как внутри этой поверхности находится заряд Q_1, то для неё, согласно теореме Остроградского-Гаусса, можно записать равенство:

$$\oint_S E_n dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}.$$

(2)

Так как $E_n = E_2$ = const, то из условий симметрии следует:

$$E_2\oint_S dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad E_2 S_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0},$$

откуда получаем: $E_2 = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 S_2}$.

Подставив сюда выражение площади сферы, получим:

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = 1{,}11 \text{ кВ/м}. \qquad (3)$$

3. В области III сферическую поверхность проведем радиусом r_3. Эта поверхность охватывает суммарный заряд Q_1+Q_2. Следовательно, для неё уравнение, записанное на основе теоремы Остроградского-Гаусса, будет иметь вид:

$$\oint_S E_n dS = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда, используя положения, применимые в первых двух случаях, найдем:

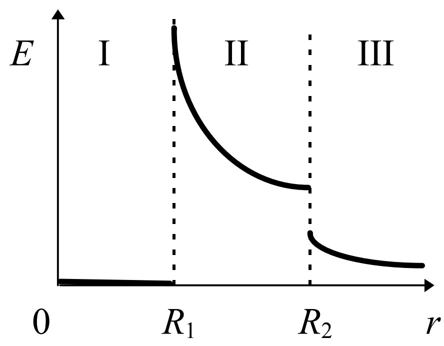
$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2} = 200 \text{ В/м}.$$

4. Построим график $E(r)$. В области I ($r_1<R_1$) напряженность

E=0. В области II (R_1<r<R_2) напряженность изменяется по закону $1/r^2$. В точке r=R_1 напряженность равна $E_2(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$=2500 В/м. В точке r=R_2 (слева) $E_2(R_2)$=$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}$=900 В/м. В области III (r>R_2) E_3 изменяется по закону $1/r^2$,

причем в точке r=R_2 (справа) имеем:

$$E_3(R_2) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 450 \text{ В/м}.$$



Таким образом, в точках r=R_1 и r=R_2 функция E(r) терпит разрыв. Качественный вид графика зависимости E(r) представлен на рисунке справа.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. Два шарика массой m=0,1 г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной l=20 см каждая. Получив одинаковый заряд Q, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол α=60°. Найти заряд каждого шарика. (Ответ: Q=50,1 нКл.)

Задача 7. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды Q=0,3.нКл каждый. Какой отрицательный заряд Q_1 нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания положительных зарядов была уравновешена силой притяжения отрицательного заряда? (Ответ: Q_1= -0,287 нКл.)

Задача 8. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью заряда τ, равной 10 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии a=20 см от его конца находится точечный заряд Q=10 нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда. (Ответ: F=4,5 мН.)

Задача 9. Тонкое полукольцо радиусом R=10см несет равномерно распределеннный заряд с линейной плотностью

$\tau = 1$ мкКл/м. В центре кривизны полукольца находится заряд Q=20нКл. Определить силу F взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца. (Ответ: F=3.6мН.)

Задача 10. Прямой металлический стержень диаметром d=5 см и длиной l=4 м несет равномерно распределенный по его поверхности заряд Q=500 нКл. Определить напряженность E поля в точке, находящейся против середины стержня на расстоянии a=1 см от его поверхности. (Ответ: E=64,3 кВ/м.)

Задача 11. Тонкое кольцо радиусом R=8 см несет заряд, равномерно распределенный по кольцу с линейной плотностью τ=10 нКл/м. Какова напряженность E электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние r=10 см? (Ответ: E=2,71 кВ/м.)

Задача 12. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями σ_1=2 нКл/м^2 и σ_2=5 нКл/м^2. Определить напряженность E поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин. Построить график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной к пластинам. (Ответ: 1) E=396 В/м; 2) E=170 В/м.)

Задача 13. Точечный заряд Q=1 мкКл находится вблизи большой равномерно заряженной пластины против её середины. Вычислить поверхностную плотность σ заряда пластины, если на точечный заряд действует сила F=60 мН. (Ответ: σ=1,06 мкКл/м ^{2}.)

Задача 14. На металлической сфере радиусом R=10 см находится заряд Q=1 нКл. Определить напряженность E электрического поля в следующих точках: 1) на расстоянии r_1=8 см от центра сферы; 2) на её поверхности; 3) на расстоянии r_2=15 см от центра сферы. Построить график зависимости E от r. (Ответ: 1) E=0; 2) E=900 В/м; 3) E=400 В/м.)

Задача 15. Прямоугольная плоская площадка со сторонами, длины a и b которых равны 3 и 2 см, соответственно, находится на расстоянии R=1 м от точечного заряда Q=1 мкКл. Площадка ориентирована так, что линии напряженности составляют угол β=30° с её поверхностью. Найти поток Ψ_E вектора напряженности через площадку. (Ответ: Ψ_E =2,7 В·м.)

Тема 2. Работа сил электростатического поля. Потенцал.

Примеры решения задач

Задача 1. Положительные заряды Q_1=3 нКл и Q_2=20 нКл находятся в вакууме на расстоянии r_1=1,5 м друг от друга. Определить работу A', которую надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния r_2=1 м.

Решение:

Положим, что первый заряд Q_1 остается неподвижным. Тогда второй заряд Q_2 под действием внешних сил перемещается в поле, созданном зарядом Q_1. При этом, он приближается к нему с расстояния r_1=1,5 м до r_2=1 м. Работа A' внешней силы по перемещению заряда Q_2 из одной точки поля с потенциалом φ_1 в другую, потенциал которой φ_2, равна по модулю и противоположна по знаку работе A сил поля по перемещению заряда между теми же точками:

$$A' = -A .$$

Работа A сил поля по перемещению заряда равна: $A=Q_2(\varphi_1-\varphi_2)$.

Тогда работа A' внешних сил может быть записана в виде:

$$A' = -Q_2\ (\varphi_1 - \varphi_2) = Q_2\ (\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1)$$

Потенциалы точек начала и конца пути выразятся формулами:

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}; \quad \varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Подставляя выражения для φ_1 и φ_2 в формулу (1), получаем:

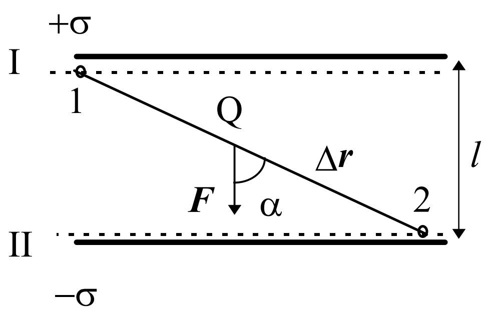
$$A' = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)=180 \text{ мкДж} .$$

Ответ: A'=180 мкДж.

Задача 2. Найти работу A поля по перемещению заряда Q=10 нКл из точки 1 в точку 2, находящиеся между двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью σ=0,4 мкКл/м^2 бесконечными параллельными плоскостями, расстояние между которыми l равно 3 см.

Решение:

Расположение точек «1» и «2» между заряженными плоскостями показано на рисунке.



Возможны два способа решения задачи.

Первый способ. Работу сил поля по перемещению заряда Q из точки 1 поля с потенциалом φ_1 в точку 2 поля с потенциалом φ_2 найдем по формуле:

$$A=Q\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad . (1)$$

Для определения потенциалов в точках 1 и 2 проведем через эти точки эквипотенциальные поверхности I и II. Эти поверхности будут плоскостями, так как поле между двумя равномерно заряженными бесконечными параллельными плоскостями однородно. Для такого поля справедливо соотношение

$$\varphi_1-\varphi_2=El, \qquad (2)$$

где E - напряженность поля, l - расстояние между эквипотенциальными поверхностями.

Напряженность поля между параллельными бесконечными разноименно заряженными плоскостями есть $E=\sigma/\varepsilon_0$. Подставив это выражение в формулу (2) и затем полученное выражение в формулу (1), имеем $A=\frac{Ql\sigma}{\varepsilon_0}$=13,6 мкДж.

Второй способ. Так как поле однородно, то сила, действующая на заряд Q, при его перемещении постоянна. Поэтому, работу перемещения заряда из точки 1 в точку 2 можно подсчитать по формуле:

$$A=F\Delta r\cdot\cos\alpha, \qquad (3)$$

где F - сила, действующая на заряд, Δr - модуль перемещения заряда из точки 1 в точку 2, α - угол между направлениями перемещения и силы. Так как $F=QE=Q(\sigma/\varepsilon_0)$, а $\Delta r\cdot\cos\alpha = l$, то

$$A=\frac{Ql\sigma}{\varepsilon_0}=13{,}6 \text{ мкДж}.$$

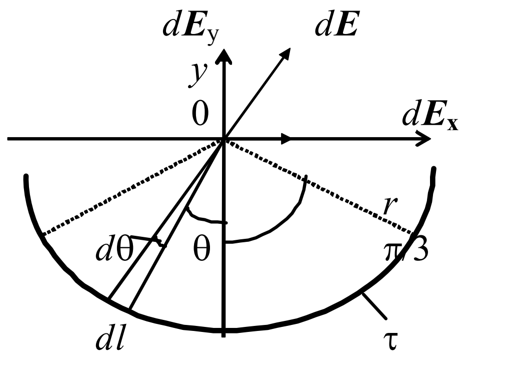
Оба решения приводят к одному и тому же результату.

Ответ: A =13,6 мкДж.

Задача 3. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом R, равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ=10 нКл/м. Определить напряженность $\boldsymbol{E}$ и потенциал φ электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке «0» , совпадающей с центром кривизны дуги. Длина нити l составляет 1/3 длины окружности и равна 15 см.

Решение:

Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось y была расположена симметрично относительно концов дуги, как показано на рисунке. На



нити выделим элемент длины dl. Заряд $dQ=\tau dl$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным. Определим напряженность электрического поля в точке «0». Для этого найдем сначала напряженность $d\boldsymbol{E}$ поля, создаваемого зарядом dQ :

$$d\boldsymbol{E}=\frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r}$ -радиус-вектор, направленный от элемента dl к точке, напряженность в которой вычисляется. Выразим вектор $d\boldsymbol{E}$ через его проекции dE_x и dE_y на оси координат: $d\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}dE_x + \boldsymbol{j}dE_y$, где $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ -единичные векторы направлений (орты).

Напряженность поля $\boldsymbol{E}$ найдем интегрированием:

$$\boldsymbol{E} = \int_l d\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\int_l dE_x + \boldsymbol{j}\int_l dE_y\,.$$

Интегрирование ведется вдоль дуги длины l. В силу симметрии интеграл $\int_l dE_x$ равен нулю. Тогда:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}\int_l dE_y \quad , \qquad (1)$$

где $dE_y = dE \cdot \cos\theta = \dfrac{\tau dl}{4\pi\, \varepsilon_0 r^2}\cos\theta$.

Так как $r=R=\text{const}$ и $dl=Rd\theta$, то $dE_y=\dfrac{\tau \cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

Подставим найденное выражение для dE_y в (1). Приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси oy, пределы интегрирования возьмем от 0 до π/3 и удвоим результат. Тогда получаем:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{j}\frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta d\theta = \boldsymbol{j}\,\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} .$$

Подставив указанные пределы и выразив R через длину дуги ($3l=2\pi R$), получим: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}\dfrac{\tau\sqrt{3}}{6\varepsilon_0 l}$.

Из этой формулы видно, что вектор $\boldsymbol{E}$ совпадает с положительным направлением оси oy. Подставив значение τ и l в последнюю формулу и сделав вычисления, найдем E=2,18 кВ/м.

Определим потенциал электрического поля в точке «0». Для этого сначала найдем потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом dQ в точке «0»:

$$d\varphi=\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Заменим r на R и, учитывая, что $l=2\pi R/3$, произведем интегрирование:

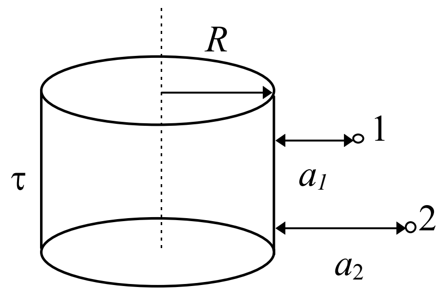
$$\varphi=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^l dl = \frac{\tau}{6\varepsilon_0} = 188 \text{ В}.$$

Ответ: φ=188 В.

Задача 4. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом R=1 см, равномерно заряженным с линейной плотностью τ=20 нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстояниях a_1=0,5 см и a_2=2 см от поверхности цилиндра в средней его части.

Решение:

Взаимное расположение точек поля и заряженного цилиндра показано на рисунке. Для определения разности потенциалов воспользуемся известным соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала: $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi$.



Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, это соотношение можно записать в виде:

$E = -\frac{d\varphi}{dr}$ или $d\varphi = -Edr$.

Интегрируя последнее выражение, найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r1}^{r2} Edr \ . \qquad (1)$$

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля, создаваемого заряженным цилиндром, можно воспользоваться формулой:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Подставив выражение для E в равенство (1) и интегрируя, получим:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

или: $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$.

Представив r_1 и r_2 как: r_1=R+a_1 и r_2=R+a_2, получим φ_1-φ_2 =250 В.

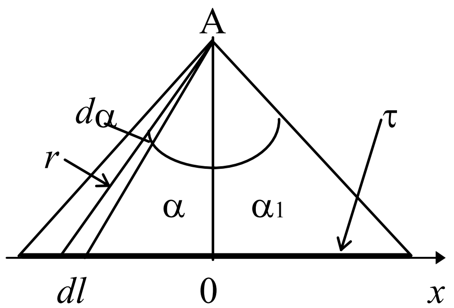
Ответ: φ_1-φ_2=250 В.

Задача 5. Электрическое поле создано тонким стержнем, несущим равномерно распределенный по длине заряд τ=0,1 мкКл/м. Определить потенциал φ поля в точке, удаленной от концов стержня на расстояние, равное длине стержня.

Решение:

Геометрия задачи показана на рисунке. Заряд, находящийся на стержне, нельзя считать точечным, поэтому непосредственно применить для вычисления потенциала формулу:

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\ , \qquad (1)$$



справедливую только для точечных зарядов, нельзя. Но, если разбить стержень на элементарные отрезки *dl*, то заряд $dQ=\tau dl$, находящийся на каждом из них, можно рассматривать как точечный и тогда формула (1) будет справедлива. Применив эту формулу, получим:

$$d\varphi=\frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (2)$$

где r - расстояние от точки, в которой определяется потенциал, до элемента стержня. Из рисунка следует, что $dl\cos\alpha=rd\alpha$. Подставив dl из этого выражения в формулу (2), находим:

$$d\varphi=\frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha}.$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от α_1 до α_2, получим формулу для потенциала, создаваемого всем зарядом, распределенным на стержне:

$$\varphi=\int_{\alpha 1}^{\alpha 2}\frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha}.$$

В силу симметрии расположения точки A относительно концов стержня, имеем $\alpha_1=\alpha_2=\pi/6$ и, поэтому, пределы интегрирования возьмем от 0 до $\pi/6$, а результат удвоим:

$$\varphi=\frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\alpha 1}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Проинтегрировав и подставив пределы интегрирования, получим ответ:

$$\varphi = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}(\ln tg\frac{\pi}{3} - \ln tg\frac{\pi}{4}) = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln tg\frac{\pi}{3} = 990 \text{ В}.$$

Ответ: φ=990 В.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. При перемещении заряда Q=20 нКл между двумя точками поля, внешними силами была совершена работа A=4 мкДж. Определить работу A сил поля и разность потенциалов Δφ этих точек поля.

(Ответ: A= -4 мкДж, Δφ=200 В.)

Задача 7. Определить потенциал φ электрического поля в точке, удаленной от зарядов Q_1= -0,2 мкКл и Q_2=0,5 мкКл, соответственно, на r_1=15 см и r_2=25 см. (Ответ: φ=6 кВ.)

Задача 8. По тонкому кольцу радиусом R=10 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ=10 нКл/м. Определить потенциал φ в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии a=5 см от центра. (Ответ: φ=505 В.)

Задача 9. На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ=10 нКл/м. Вычислить потенциал φ, создаваемый этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка. (Ответ: φ=62,4 В.)

Задача 10. Тонкие стержни образуют квадрат со стороной длиной a. Стержни заряжены с линейной плотностью τ=1,33 нКл/м. Найти потенциал φ в центре квадрата. (Ответ: φ=84,7 В.)

Задача 11. Две бесконечные параллельные плоскости находятся на расстоянии d=0.5 см друг от друга. На плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1=0,2 мкКл/м^2 и σ_2=-0,3 мкКл/м^2. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между плоскостями. (Ответ: $\Delta\varphi$=141 В.)

Задача 12. Сто одинаковых капель ртути, заряженных до потенциала φ_1=20 В каждая, сливаются в одну большую каплю. Каков потенциал φ образовавшейся капли? (Ответ: φ =432 В.)

Задача 13. Напряженность *E* однородного электрического поля равна 120 В/м. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между двумя точками, лежащими на одной силовой линии и находящимися на расстоянии Δr=1 мм. (Ответ: $\Delta\varphi$=0,12 В.)

Задача 14. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом *R*=10 см. Он заряжен с линейной плотностью τ=300 нКл/м. Какую работу *A* надо совершить, чтобы перенести заряд *Q*=5 нКл из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии *a*=20 см от его центра? (Ответ: *A*=47 мкДж.)

Задача 15. Электрическое поле создано положительным точечным зарядом. Потенциал φ поля в точке, удаленной от заряда на *r*=12 см, равен 24 В. Определить значение и направление градиента потенциала в этой точке. (Ответ: $|\mathrm{grad}\varphi|$=200 В/м, градиент направлен к заряду.)

Тема 3. Электроемкость. Конденсаторы

Примеры решения задач.

Задача 1. Найти электроемкость *C* уединенного металлического шара радиусом *R*=1 см.

Решение:

Электрическая емкость уединенного проводника по определению равна:

$$C = \frac{q}{\varphi} \ ,$$

где q - заряд, сообщенный проводнику, φ - потенциал проводника. Потенциал металлического шара φ равен потенциалу на его поверхности:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

поэтому электроемкость металлического шара определяется выражением:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

Принимая во внимание, что электродинамическая постоянная ε_0 равна $8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, и подставляя численное значение для радиуса шара R=0,01м, получаем C=$1{,}11\cdot10^{-12}$ Ф =1,11 пФ.
Ответ: C=1,11 пФ.

Задача 2. Два металлических шара радиусами R_1=2 см и R_2=6 см соединены проводником, емкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщен заряд Q=1 нКл. Найти поверхностные плотности σ_1 и σ_2 зарядов на шарах.

Решение:
Обозначим заряд первого шара через q_1. Так как суммарный заряд на обоих шарах равен Q, то заряд второго шара будет q_2=Q-q_1. Так как емкостью соединительного проводника можно пренебречь, то шары можно рассматривать как уединенные, и определять емкости каждого шара по формулам $C_1=4\pi\varepsilon_0 R_1$ и $C_2=4\pi\varepsilon_0 R_2$, соответственно. Пользуясь формулой емкости уединенного проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

найдем потенциалы шаров:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{Q - q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Так как шары соединены проводником и представляют собой единый металлический предмет, то их потенциалы равны между собой $\varphi_1=\varphi_2$ или:

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q - q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Решая полученное уравнение относительно q_1, находим заряд первого шара:

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q \ ,$$

а затем и заряд второго шара:

$$q_2 = Q - q_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q .$$

Так как площадь поверхности шара S связана с его радиусом R соотношением S=4πR^2, то поверхностные плотности зарядов шаров будут равны:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{Q}{4\pi R_1 (R_1 + R_2)}$$

и

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{Q}{4\pi R_2 (R_1 + R_2)} .$$

Подставляя численные значения Q=1 нКл=10^{-9} Кл, R_1=0,02 м и R_2=0,06 м, получаем σ_1=49,8 нКл/м^2 и σ_2 =16,6 нКл/м^2.
Ответ: σ_1=49,8 нКл/м^2 , σ_2= 6,6 нКл/м^2.

Задача 3. Определить электроемкость C плоского слюдяного конденсатора, площадь S пластин которого равна 100 см^2, а расстояние между ними равно 0,1 мм. Диэлектрическая проницаемость слюды ε =7,0.

Решение:

Электрическая емкость плоского конденсатора определяется по формуле:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} ,$$

где d - расстояние между пластинами, S - площадь пластин, ε - диэлектрическая проницаемость среды, ε_0=8,85·10^{-12} Ф/м - электрическая постоянная. Используя численные значения задачи S=10^{-2} м^2 и d=10^{-4} м, получаем C=6,2·10^{-9} Ф.

Ответ: C=6,2 нФ.

Задача 4. Две концентрические металлические сферы радиусами R_1=2 см и R_2=2,1 см образуют сферический конденсатор. Определить его электроемкость C, если пространство между сферами заполнено парафином. Диэлектрическая проницаемость парафина ε =2,0.

Решение:

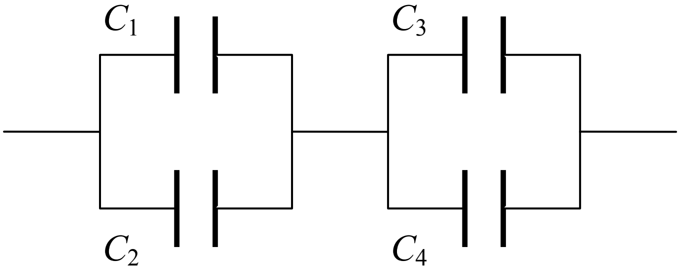
Электрическая емкость сферического конденсатора определяется по формуле

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$

Используя численные значения задачи R_1=0,020 см, R_2=0,021см и ε_0=8,85·10^{-12} Ф/м, получаем C=93,3·10^{-12} Ф.

Ответ: C=93,3 пФ

Задача 5. Конденсаторы соединены так, как это показано на рисунке.



Электроемкости конденсаторов: C_1=0,2 мкФ, C_2=0,1 мкФ, C_3=0,3 мкФ, C_4=0,4 мкФ. Определить электроемкость C батареи конденсаторов.

Решение:

Конденсаторы C_1 и C_2 соединены параллельно, поэтому их эквивалентная емкость C' равна C_1+C_2. Аналогично, эквивалентная емкость конденсаторов C_3 и C_4 равна C''=C_3+C_4. Конденсаторы C' и C'' соединены последовательно и, следовательно, общая емкость батареи конденсаторов может быть определена из условия:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''}.$$

Выражая из последнего соотношения C и подставляя в результат C' и C'', находим окончательное выражение для емкости батареи:

$$C = \frac{C'C''}{C'+C''} = \frac{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}\ .$$

Подставляя численные значения, получаем C =0,21мкФ .

Ответ: C =0,21мкФ.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. Определить электроемкость C металлической сферы радиусом R=2 см, погруженной в воду. Диэлектрическая проницаемость воды ε =81. (Ответ: C=180 пФ.)

Задача 7. Шар радиусом R_1=6 см заряжен до потенциала φ_1=300 В, а шар радиусом R_2=4 см - до потенциала φ_2=500 В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь. (Ответ: φ=380 В.)

Задача 8. Между пластинами плоского конденсатора находится плотно прилегающая стеклянная пластинка ($\varepsilon = 7.0$). Конденсатор заряжен до разности потенциалов $U_1 = 100$ В. Какова будет разность потенциалов U_2 , если вытащить стеклянную пластинку из конденсатора?

. (Ответ:U_2=700В)

Задача 9. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 1.33 мм, площадь S пластин равна 20 см^2. В пространстве между пластинами конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды толщиной d_1=0.7 мм и эбонита толщиной d_2=0,3 мм. Определить электроемкость C конденсатора. Диэлектрические проницаемости слюды ε_1 =7.0, эбонита ε_2 =3.0, воздуха ε_3 =1.0. (Ответ: C=33.4 пФ.)

Задача 10. На пластинах плоского конденсатора равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = .2\ \frac{\text{ìêÊë}}{\text{ì}^2}$. Расстояние d между пластинами равно 1мм. На сколько изменится разность потенциалов на его обкладках при увеличении расстояния d между пластинами до 3мм? (Ответ: $\Delta\phi$=45В.)

Задача 11. К воздушному конденсатору, заряженному до разности потенциалов U=600 В и отключенному от источника напряжения, присоединили параллельно второй незаряженный конденсатор таких же размеров и формы, но с диэлектриком из фарфора. Определить диэлектрическую проницаемость ε фарфора, если после присоединения второго конденсатора разность потенциалов уменьшилась до U_1=100 В.

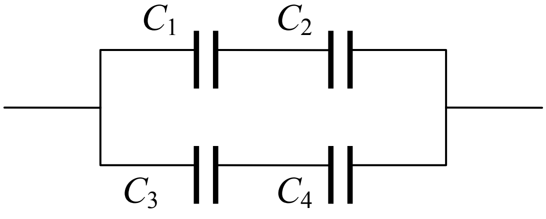
(Ответ: ε=5.0.)

Задача 12. Два конденсатора электроемкостями C_1=3 мкф и C_2=6 мкф соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС E=120 В. Определить заряды Q_1 и Q_2 конденсаторов и разности потенциалов U_1 и U_2 между их обкладками, если конденсаторы соединены : 1) параллельно; 2) последовательно. (Ответ: 1) Q_1=360 мкКл, Q_2=720 мкКл, U_1=U_2=120 В; 2) Q_1=Q_2=240 мкКл, U_1=80 В, U_2=40 В.)

Задача 13. Конденсатор электроемкостью C_1=0.2 мкФ был заряжен до разности потенциалов U_1=320 В. После того, как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до разности потенциалов U_2=450 В, напряжение U на нем изменилось до 400 В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора. (Ответ: C_2=0.32 мкФ.)

Задача 14. Три одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно. Электроемкость C такой батареи конденсаторов равна 89 пФ. Площадь S каждой пластины равна 100 см^2 . Диэлектрик - стекло с диэлектрической проницаемостью ε=7.0. Какова толщина d стекла? (Ответ: d=2.32 мм.)

Задача 15. Конденсаторы электроемкостями C_1=10 нФ, C_2=40 нФ, C_3=20 нФ и C_4=30 нФ соединены так, как это показано на рисунке.



Определить электроемкость C батареи. (Ответ: C=20 пФ.)

Тема 4. Диэлектрики в электрическом поле. Энергия электрического поля.

Примеры решения задач.

Задача 1. Вычислить электрический момент *p* диполя, если его заряд Q=10 нКл, плечо l =0,5 см.

Решение:

Вектором электрического момента диполя ***p*** называется произведение заряда |Q| (взятого по модулю) на плечо ***l***. Вектор ***l*** направлен от отрицательного заряда диполя к его положительному заряду. Поэтому, длина вектора дипольного момента *p* равна произведению Ql. Подставляя численные значения $Q=10^{-8}$ Кл и $l=5\cdot10^{-3}$ м , получаем $p=5\cdot10^{-8}$ Кл·м.

Ответ: p=50 нКл·м.

Задача 2. Определить напряженность *E* и потенциал φ поля, создаваемого диполем с электрическим моментом p=4 пКл м на расстоянии r=10 см. от центра диполя, в направлении, составляющем угол $\alpha=60^0$ с вектором электрического момента.

Решение:

Напряженность поля диполя определяется выражением:

$$E=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}\ ,$$

а потенциал электрического поля в этой же точке пространства равен:

$$\varphi=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha\ .$$

Используя численные значения задачи, получаем E= 47,6 В/м и φ=1,8 В.

Ответ: E=47,6 В/м, φ=1,8 В.

Задача 3. Расстояние *d* между пластинами плоского конденсатора равно 2 мм, разность потенциалов U=1.8 кВ. Диэлектрик - стекло с диэлектрической проницаемостью ε=7.0. Определить диэлектрическую восприимчивость χ стекла и поверхностную плотность σ' связанных (поляризационных) зарядов на поверхности стекла.

Решение:

Диэлектрическая проницаемость ε связана с диэлектрической восприимчивостью χ соотношением:

$$\varepsilon = 1+\chi.$$

Поэтому χ=6,0. Поверхностная плотность σ' связанных зарядов на границе стекла равна нормальной (перпендикулярной к поверхности диэлектрика) компоненте вектора поляризации $\boldsymbol{P}$, который, в свою очередь, определяется через вектор напряженности электрического поля в диэлектрике $\boldsymbol{E}$ с помощью соотношения:

$$\boldsymbol{P} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{E}\ ,$$

где ε_0 - электрическая постоянная. Напряженность же электрического поля внутри конденсатора равна:

$$E = \frac{U}{\varepsilon d}\ .$$

В нашем случае длина нормальной компоненты вектора поляризации равна длине всего вектора $\boldsymbol{P}$**,** так как последний перпендикулярен к границе раздела. Поэтому, выражение для поверхностной плотности связанного заряда имеет вид:

$$\sigma' = |\mathbf{P}| = \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 U}{\varepsilon d}\ .$$

Используя численные значения задачи, получаем σ'=47,7 мкКл/м^2 .

Ответ: χ=6,0 и σ'=47,7 мкКл/м^2 .

Задача 4. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 0,2 см, разность потенциалов U=6 кВ. Заряд Q каждой пластины равен 10 нКл. Вычислить энергию W поля конденсатора и силу F взаимного притяжения пластин.

Решение:

Энергия заряженного конденсатора определяется по любой из следующих трех формул:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} \ .$$

Для нашей задачи последнее соотношение сразу определяет энергию поля конденсатора W=3·10^{-5} Дж. С другой стороны, используя выражение для емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \ ,$$

где S - площадь пластин, получаем энергию поля конденсатора в виде:

$$W = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} \ . \qquad (1)$$

Если расстояние между пластинами будет переменной величиной, которую мы обозначим через x, то последняя формула определяет зависимость энергии электрического поля внутри конденсатора от расстояния x между его пластинами:

$$W(x) = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} \ .$$

Учитывая известную из механики связь между энергией W и силой взаимодействия пластин F:

$$F = -\frac{dW}{dx} \ ,$$

получаем:

$$F = -\frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} \ .$$

Выражая неизвестную площадь пластин конденсатора из формулы (1), приходим к простому соотношению:

$$F = -\frac{W}{d} \ .$$

Знак минус в этой формуле указывает на то, что сила взаимодействия пластин препятствует увеличению энергии поля конденсатора, то есть это сила притяжения. Используя численные значения задачи и вычисленную величину энергии W , получаем F =15 мН .

Ответ: W=3·10^{-5} Дж, F =15 мН.

Задача 5. Найти энергию W уединенной сферы радиусом R=4 см, заряженной до потенциала φ=500 В.

Решение:

Энергия заряженного уединенного проводника определяется выражением:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} ,$$

где φ - потенциал проводника, C - электрическая емкость проводника. В нашем случае емкость сферы равна:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

и, поэтому,

$$W = 2\pi\varepsilon_0 R\varphi^2 .$$

Используя численные значения задачи, получаем W=0.55 мкДж.

Ответ: W=0.55мкДж.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. Расстояние l между зарядами Q = ±3.2 нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E поля, созданного диполем в точке, удаленной на r=8 см как от первого, так и от второго заряда. (Ответ: E=6.75 кВ/м.)

Задача 7. Эбонитовая плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью E_o=2 МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности поля. Определить поверхностную плотность σ*'* связанных зарядов на гранях пластины.

(Ответ: σ'= ±11.8 мкКл/м^2.)

Задача 8. Металлический шар радиусом 5 см окружен равномерно слоем фарфора толщиной d=2 см. Определить поверхностные плотности σ_1' и σ_2' связанных зарядов, соответственно, на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд Q шара равен 10 нКл.

(Ответ: σ_1'= -0.255 мкКл/м^2 и σ_2'=0.130 мкКл/м^2.)

Задача 9. Определить, при какой напряженности E среднего макроскопического поля в диэлектрике (ε=3) его поляризованность P достигнет значения, равного 200 мкКл/м^2. (Ответ: E=11.3 МВ/м.)

Задача 10. Определить поляризованность P стекла, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью E_o=5 МВ/м. (Ответ: P=37.9мкКл/м^2).

Задача 11. Диэлектрик поместили в электрическое поле напряженностью E_0=20 кВ/м. Чему равна поляризованность P диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной 4 кВ/м ? (Ответ: P=142 нКл/м^2.)

Задача 12. Конденсатору электроемкость C которого равна 10 пФ, сообщен заряд Q=1 нКл. Определить энергию W конденсатора. (Ответ: W=0,05 мкДж.)

Задача 13. Какое количество теплоты Q выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов U между пластинами равна 15 кВ, расстояние d=1 мм, диэлектрик - слюда с диэлектрической проницаемостью ε =7.0 и площадь S каждой пластины равна 300 см^2 ?

(Ответ: Q=0.209 Дж.)

Задача 14. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН. Площадь S каждой пластины равна 200 см^2. Найти плотность энергии w поля конденсатора. (Ответ: w=2.5Дж/м^3.)

Задача 15. Конденсаторы электроемкостями C_1=1 мкФ, C_2=2 мкФ, C_3=3 мкФ включены в цепь с напряжением U=1.1 кВ. Определить энергию каждого конденсатора в случаях: 1) последовательного их включения; 2) параллельного включения. (Ответ: 1) 0.18 Дж, 0.09 Дж, 0.06 Дж; 2) 0.605 Дж, 1.21 Дж, 1.82 Дж.)

Тема 5. Постоянный электрический ток

Примеры решения задач.

Задача 1. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от I_0=0 А до I=3 А в течение времени t=10 с. Определить заряд Q, прошедший в проводнике.

Решение:

Условие равномерного возрастания тока приводит к линейной зависимости тока I от времени, а именно $I=at+b$, где a и b - неизвестные константы. Учитывая, что в начальный момент времени $t=0$ ток был равен нулю, получаем $b=0$. При $t=10$ с ток в проводнике равен $I=3$ А. Это условие приводит к соотношению $3=10a$, откуда $a=0{,}3$. Таким образом, зависимость тока от времени имеет вид $I=0.3t$. По определению силы тока:

$$\frac{dQ}{dt}=I\,,$$

откуда $dQ=Idt$. Интегрируя последнее равенство с учетом полученной зависимости тока от времени, находим:

$$Q=\frac{0.3t^2}{2}+C\,,$$

где C - неизвестная константа интегрирования. Она определяется из начальных условий: в момент времени $t=0$ еще никакого заряда через проводник не протекло и, поэтому, в этот момент времени $Q=0$. Этому условию удовлетворяет константа C равная нулю. Следовательно, зависимость заряда от времени определяется соотношением:

$$Q=\frac{0.3t^2}{2}\,.$$

Подставляя сюда значение $t=10$ с, находим заряд, протекший по проводнику за указанное время, $Q=15$ Кл.

Ответ: $Q=15$ Кл.

Задача 2. Две батареи ($E_1=1.2$ В, $r_1=0.1$ Ом и $E_2=0.9$ В, $r_2=0.3$ Ом) соединены одноименными полюсами. Сопротивление R соединительных проводов равно 0.2 Ом. Определить силу тока I в цепи.

Решение:

Электродвижущие силы (ЭДС) батарей направлены в противоположные стороны, поэтому итоговая ЭДС в рассматриваемой цепи будет равна $E = E_1 - E_2$. Закон Ома для замкнутой цепи дает:

$$E = I(R + r_1 + r_2),$$

где учтено, что сопротивления r_1 и r_2 соединены последовательно. Поэтому сила тока в цепи равна:

$$I = \frac{E}{R + r_1 + r_2} .$$

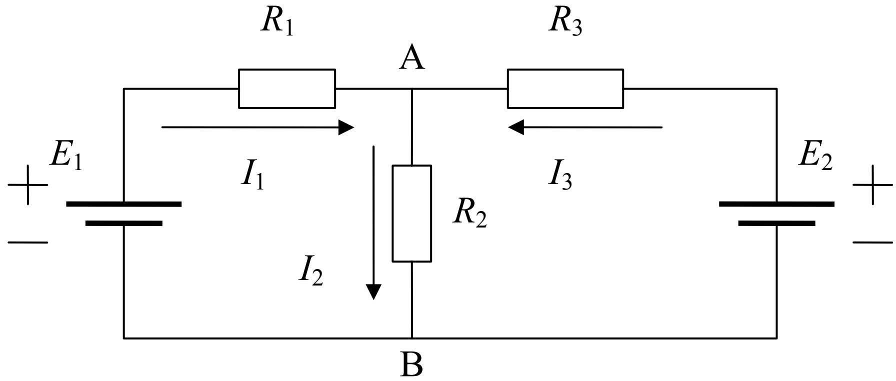
Используя численные условия задачи, получаем I=0.5 А.

Ответ: I=0.5 А.

Задача 3. Определить силу тока I_3 в резисторе сопротивлением R_3 в схеме, показанной на рисунке, и напряжение U_3 на концах резистора, если E_1=4 В, E_2=3 В, R_1=2 Ом, R_2=6 Ом, R_3=1 Ом. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Решение:

Токи, текущие через резисторы, и их направления указаны на рисунке. Силы токов в разветвленной цепи определяют с помощью законов Кирхгофа.



Первый закон Кирхгофа для узла А гласит: алгебраическая сумма токов в узле равна нулю. Считая токи текущие к узлу положительными, а токи вытекающие из узла отрицательными, получим:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 .$$

Применение второго закона Кирхгофа требует предварительного выбора произвольного замкнутого контура в цепи и выбора направления обхода этого контура. Если направление ЭДС в контуре совпадает с направлением обхода, то ЭДС берется со знаком плюс, а если нет, то со знаком минус. Если направление тока через некоторый резистор совпадает с направлением обхода, то падение напряжения на нем (произведение силы тока на сопротивление) берется со знаком плюс, а если нет, то со знаком минус. С учетом указанного правила знаков, второй закон Кирхгофа формулируется так: алгебраическая сумма падений напряжения в произвольном замкнутом контуре цепи равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре. Применение второго закона Кирхгофа для контура АE_1В дает:

$$I_1R_1 + I_2R_2 = E_1 ,$$

а для контура АE_2В имеем:

$$I_3R_3 + I_2R_2 = E_2 .$$

Полученные уравнения представляют собой систему трех уравнений с тремя неизвестными токами I_1 , I_2 и I_3. Решая эту систему, найдем все три неизвестные величины токов. В частности:

$$I_3 = \frac{E_2R_1 + E_2R_2 - E_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} .$$

Напряжение на концах резистора равно $U_3=I_3R_3$. Подстановка численных значений задачи дает следующий результат: I_3=0 и U_3=0.

Ответ: I_3=0 А и U_3 =0 В.

Задача 4. ЭДС батареи аккумуляторов E=12 В, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

Решение:

Сила тока в замкнутой цепи, содержащей батарею аккумуляторов с ЭДС E, внутренним сопротивлением r и внешним сопротивлением R определяется законом Ома:

$$I = \frac{E}{R + r}. \qquad (1)$$

Поэтому, мощность P, выделяемая на внешнем сопротивлении, равна:

$$P = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R+r)^2} \ . \qquad (2)$$

Рассматривая полученное выражение для *P* как функцию *R*, найдем, при каком внешнем сопротивлении достигается максимальное значение мощности. Для этого необходимо продифференцировать функцию *P*(*R*) по *R* и найти, при каких значениях *R* эта производная обращается в нуль. Выполнив дифференцирование, приходим к уравнению

$$\frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3} = 0 \ ,$$

из которого получаем, что максимальная мощность выделяется тогда, когда внешнее сопротивление *R* равно внутреннему *r*. Подставляя в выражение (2) для мощности *P* значение *R*=*r*, получаем, что максимальная мощность определяется соотношением:

$$P_{max} = \frac{E^2}{4r} \ . \qquad (3)$$

Внутреннее сопротивление батареи *r* найдем из условия короткого замыкания. При коротком замыкании внешнее сопротивление цепи *R*=0 и, следовательно, из формулы (1) находим внутреннее сопротивление батареи:

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{I}_{\text{кз}}} \ ,$$

где $\mathrm{I}_{\text{кз}}$ - ток короткого замыкания. Подставляя полученное выражение для внутреннего сопротивления в формулу (3), приходим к искомому выражению для максимальной мощности:

$$\mathrm{P}_{\max} = \frac{\mathrm{E}\mathrm{I}_{\text{кз}}}{4} \ .$$

Используя численные значения задачи, получаем P_{max}=15 Вт.

Ответ: P_{max}=15 Вт.

Задача 5. Определить среднюю скорость *v* упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока *I*=10 А и сечении *S* проводника, равном 1 мм^2. Принять, что на каждый атом меди приходится два электрона проводимости.

Решение:

Плотность тока j в проводнике по определению равна:

$$j = \frac{I}{S} \ .$$

С другой стороны, соотношение для расчета плотности тока может быть получено через среднюю скорость носителей заряда в проводнике (электронов) v и концентрацию носителей (число носителей в единице объема проводника) n с помощью выражения:

$$j = env \ ,$$

где e - элементарный заряд (e= 1.6·10^{-19} Кл). Приравнивая правые части полученных формул, получаем выражение для средней скорости:

$$v = \frac{I}{enS} \ .$$

Концентрацию электронов n найдем из следующих соображений. Сначала из таблицы Менделеева находим молярную массу меди: M=64·10^{-3} кг/кмоль . В одном моле любого вещества содержится N_A = 6·10^{23} атомов (число Авогадро). Объем одного моля меди равен $V=M/\rho$, где ρ - плотность меди (ρ=8,93·10^3 кг/м^3). Поэтому, число атомов меди в единице объема n_0 будет равно:

$$n_0 = \frac{N_A}{V} = \frac{N_A\rho}{M} \ .$$

Так как на каждый атом меди приходится два электрона проводимости, то концентрация электронов проводимости будет $n=2n_0$. В итоге, средняя скорость электронов равна:

$$v = \frac{M}{2e\rho N_A}\frac{I}{S} \ .$$

Подставляя в эту формулу численные значения задачи, окончательно получим v=3,7·10^{-6} м/с.

Ответ: v=3,7 мкм/с.

Задачи для самостоятельного решения.

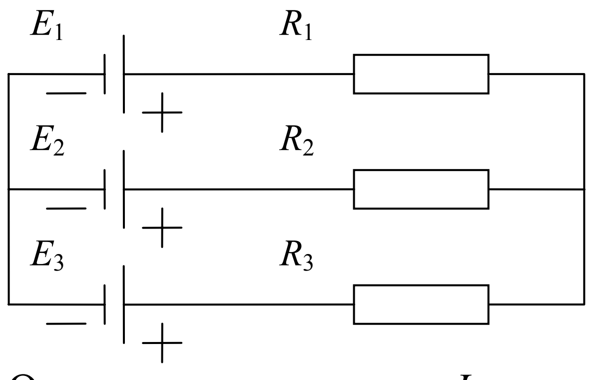
Задача 6. Определить плотность тока j в железном проводнике (удельное сопротивление железа ρ =98 нОм·м) длиной l=10 м, если провод находится под напряжением U=6 В. (Ответ: j= 6,1 МА/м^2.)

Задача 7. Внутреннее сопротивление r батареи аккумуляторов равно 3 Ом. Сколько процентов от точного значения ЭДС составляет погрешность, если, измеряя разность потенциалов на зажимах батареи вольтметром с сопротивлением $R_В$=200 Ом, принять ее равной ЭДС?

(Ответ: 1,48%.)

Задача 8. К источнику тока с ЭДС E=1,5 В присоединили катушку с сопротивлением R=0,1 Ом. Амперметр показал силу тока, равную I_1=0,5 А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока в той же катушке оказалась равной 0,4 А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников тока. (Ответ: r_1=2,9 Ом, r_2=4,5 Ом.)

Задача 9. Три источника тока с ЭДС E_1=11 В, E_2=4 В и E_3=6 В и три реостата с сопротивлениями R_1=5 Ом, R_2=10 Ом и R_3=2 Ом соединены, как показано на рисунке.



Определить силы токов I в реостатах. Внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало. (Ответ: I_1=0,8 А, I_2=0,3 А, I_3=0,5 А.)

Задача 10. К батарее аккумуляторов, ЭДС E которой равна 2 В и внутреннее сопротивление r=0,5 Ом, присоединен проводник. Определить: 1) сопротивление R проводника, при котором мощность, выделяемая в нем, максимальна; 2) мощность P, которая при этом выделяется в проводнике. (Ответ: R=0,5 Ом, P=2 Вт.)

Задача 11. ЭДС E батареи равна 20 В. Сопротивление R внешеней цепи равно 2 Ом, сила тока I=4 А. Найти КПД батареи.

При каком значении внешнего сопротивления R_0 КПД будет равен 99% ? (Ответ: КПД=0,4, R_0=297 Ом.)

Задача 12. Сила тока в проводнике сопротивлением r=100 Ом равномерно нарастает от I_0=0 до I_{max}=10 А в течение времени t=30 с. Определить количество теплоты Q, выделившееся за это время в проводнике. (Ответ: Q=100 кДж.)

Задача 13. Сила тока в проводнике сопротивлением R=12 Ом равномерно убывает от I_0=5 А до I=0 в течение времени t=10 с. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени? (Ответ: Q=1 кДж.)

Задача 14. По проводнику сопротивлением R=3 Ом течет ток, сила которого линейно возрастает. Количество теплоты Q, выделившееся в проводнике за время t=8 с, равно 200 Дж. Определить количество электричества q, протекшее за это время по проводнику. В начальный момент времени сила тока в проводнике равна нулю. (Ответ: q=20 Кл.)

Задача 15. Сила тока в металлическом проводнике равна 0,8 А, сечение S проводника 4 мм^2. Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится $n=2,5\times10^{22}$ свободных электронов, определить среднюю скорость v их упорядоченного движения. (Ответ: v=0,05 мм/с.)

РАЗДЕЛ IV.ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Тема 6. Магнитное поле проводников с током. Закон Ампера.

Примеры решения задач.

Задача 1. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого отрезком бесконечно длинного прямого провода длиной l=40 см, в точке, удаленной от концов отрезка на расстояния l_1=50 см и l_2=30 см. Сила тока I, текущего по проводу, равна 50 А.

Решение:

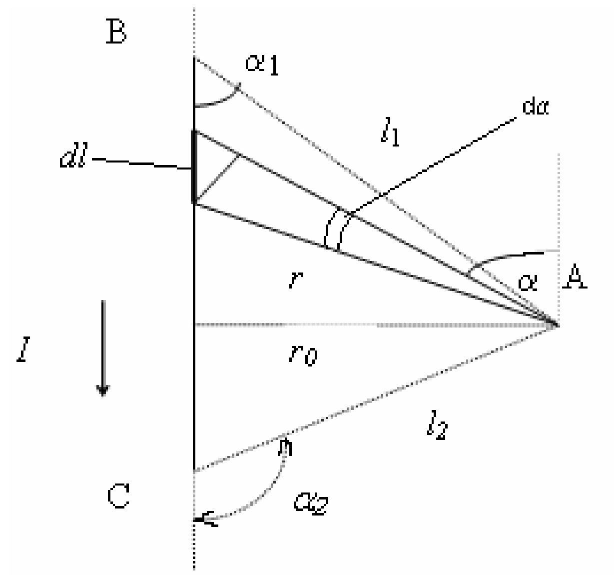
Геометрия задачи показана на рисунке. Согласно закону Био-Савара-Лапласа, индукция магнитного поля $d\boldsymbol{B}$, создаваемого отрезком провода с током I длиной dl в точке, находящейся на расстоянии r от середины отрезка dl, определяется выражением:

$$d\mathrm{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\left[\mathrm{dlr}\right]\frac{I}{r^3},$$

где $\boldsymbol{dl}$ - вектор, равный по модулю длине отрезка dl и совпадающий по направлению с током, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция, μ – магнитная проницаемость, μ_0 – магнитная постоянная.

Для модуля вектора магнитной индукции имеем выражение:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\,sin\alpha}{r^2}dl, \qquad (1)$$



где α - угол между векторами $\boldsymbol{dl}$ и $\boldsymbol{r}$. Из условия задачи следует, что провод находится в немагнитной среде (в воздухе) и, следовательно, μ=1.

Пусть элемент проводника dl виден из точки А под углом $d\alpha$, а расстояние от точки А до провода равно r_0. Из рисунка следует, что

$$dl = r\frac{d\alpha}{sin\alpha}, \quad r = \frac{r_0}{sin\,\alpha}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (1), получим:

$$dB = \frac{\mu_0 I\,sin\alpha\,d\alpha}{4\pi r_0}.$$

Чтобы определить магнитную индукцию поля, создаваемого отрезком проводника, проинтегрируем полученное выражение по углу в пределах от α_1 до α_2.

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r_0} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \, d\alpha .$$

Взяв интеграл, получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) . \qquad (2)$$

Из условия задачи следует, что $l_1^2 = l^2 + l_2^2$ (2500=1600+900), то есть $\alpha_2=90^0$, $\cos\alpha_2=0$, $r_0= l_2=30$ см, $\cos\alpha_1 = 4/5$.

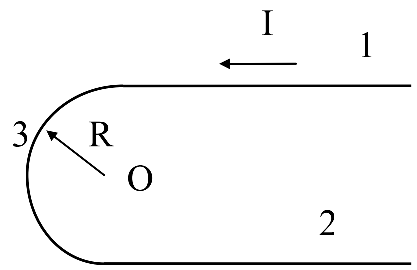
Подставляя численные значения, получим B=13,3 мкТл.

Ответ: B=13,3 мкТл.

Задача 2. Бесконечно длинный тонкий проводник изогнут по дуге окружности на 180^0 (см. рисунок). Радиус изгиба R=10 см. По проводнику течет ток I=50 А. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого этим током, в точке «О».

Решение:

Разделим проводник на три части: два прямолинейных проводника 1 и 2, уходящих одним концом в бесконечность, и дугу полуокружности 3 радиуса R. На основе принципа суперпозиции магнитных полей вектор магнитной индукции в точке «О» будет равен векторной сумме магнитных полей, создаваемых этими отрезками проводника:



$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{B_2} + \boldsymbol{B_3} .$$

Используя правило буравчика, найдем, что вектор магнитной индукции, создаваемый каждым из выделенных участков проводника, направлен перпендикулярно к плоскости чертежа на нас. В связи с этим, мы можем заменить векторную сумму алгебраической:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 .$$

Магнитная индукция поля в центре кругового витка равна:

$$B=\mu_0 I/2R.$$

Так как участок проводника 3 является дугой полуокружности, то создаваемое им в точке «О» поле будет в два раза меньше поля в центре кругового витка, т.е. $B_3=\mu_0 I/4R$.

Ток, протекающий по каждому элементу проводника 2, приводит к возникновению в точке «О» магнитного поля. Из рисунка следует, что для каждого элемента проводника 2 найдется элемент проводника 1, создающий в точке «О» такое же значение индукции магнитного поля. Это означает, что значения магнитной индукции в точке «О», создаваемые участками проводника 1 и 2, равны между собой, то есть $B_1 = B_2$.

Для нахождения величины B_1 воспользуемся формулой (2) из предыдущей задачи:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

В нашем случае $r_0=R$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pi/2$ и $B_1=\mu_0 I/4\pi R$.

В результате получаем:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 2B_1 + B_3 = \mu_0 I/2\pi R + \mu_0 I/4R$$

или: $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}(2 + \pi)$.

Подставляя численные значения, получаем B=257 мкТл.

Ответ: B=257 мкТл.

Задача 3. Проводник длиной l=0,2 м и массой 5 г расположен горизонтально в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен полю. Индукция поля равна B=0,4 Тл. Какой ток нужно пропустить по проводнику, чтобы он свободно висел в поле?

Решение:

На проводник действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{P}$, направленная вниз, и сила Ампера $\boldsymbol{F}$, которая должна быть направлена вверх. Чтобы проводник находился в равновесии, должно выполняться условие: $P=F$. Сила тяжести равна $P=mg$, где m - масса проводника, g - ускорение свободного падения. Сила Ампера, действующая на проводник с током, равна $F=IBl\sin\alpha$, где α - угол между направлением тока и направлением вектора магнитной индукции. Из условия задачи следует, что $\alpha=90^0$ и $\sin\alpha=1$. Следовательно, $mg=IBl$, откуда $I=mg/Bl$, $I=0{,}005\cdot 9{,}8/(0{,}4\cdot 0{,}2)=0{,}6$ А.

Ответ: $I=0{,}6$ А.

Задача 4. Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка равна 200 А/м. Магнитный момент p_m витка равен 1 А/м^2. Вычислить силу тока I в витке и радиус R витка.

Решение:

Магнитная индукция $\boldsymbol{B}$ и напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ связаны соотношением $\boldsymbol{B}=\mu\mu_0\boldsymbol{H}$. В центре кругового витка $B(0) = \dfrac{\mu\mu_0 I}{2R}$, и, соответственно, $H(0) = \dfrac{I}{2R}$, откуда $I=2RH$. Модуль магнитного момента находим по формуле $p_m=I\cdot S$, где S - площадь витка. Подставляя в это выражение значения I и S, получаем: $p_{\mathrm{m}}=I\cdot\pi R^2=2\pi HR^3$, откуда сразу следует, что $R = \sqrt[3]{\dfrac{p_m}{2\pi H}}$ и $I = 2H\sqrt[3]{\dfrac{p_m}{2\pi H}}$. Подставляя численные значения, получим, что $R=9{,}27$ см, $I=37$ А.

Ответ: $R=9{,}27$ см, $I=37$ А.

Задача 5. На прямой проводник длины $L=0{,}5$ м, расположенный перпендикулярно к линиям индукции магнитного поля, действует сила $F=0{,}15$ Н. Найти ток I, протекающий в проводнике, если магнитная индукция равна $B=20$ мТл.

Решение:

Силу, действующую на прямой длинный проводник с током, находящийся в магнитном поле с индукцией B, можно вычислить по формуле $F=IBL\sin\alpha$, где α – угол между направлением вектора магнитной индукции и направлением тока в проводнике. Из условия задачи следует, что $\alpha=90^0$, следовательно, $\sin\alpha=1$ и $F=IBL$. Откуда получаем $I=F/BL$.. Подставляя численные значения, находим:

$$I = \frac{0.15}{20 \cdot 10^{-3} 0.5} = 15A \,.$$

Ответ: I=15 А.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. Найти силу взаимодействия между двумя параллельными проводами длиной l=1 м, находящимися на расстоянии d=50 см друг от друга, если по ним протекают в противоположных направлениях равные токи I_1=I_2=500 А. (Ответ: F = 0,1 Н.)

Задача 7. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на расстоянии a=10 см друг от друга, текут одинаковые токи силой I=100 А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F, действующую на отрезок каждого провода длиной l=1 м.

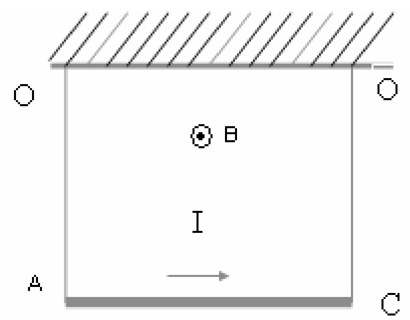
(Ответ: F_1=F_2=20 мН, F_3=34,6 мН.)

Задача 8. Из проволоки длиной l=20 см сделаны квадратный и круговой контуры. Найти вращающие моменты сил M_1 и M_2, действующих на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B=0,1 Тл. По контурам течет ток силой 2 А. Плоскость каждого контура составляет угол α=45^0 с направлением поля. (Ответ: M_1=3,53·10^{-4} н·м, M_2=4,5·10^{-4} н·м.

Задача 9. При какой силе тока I, текущего по тонкому проволочному кольцу радиусом R=0,2 м, магнитная индукция B в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние r=0,3 м, станет равной 20 мкТл?

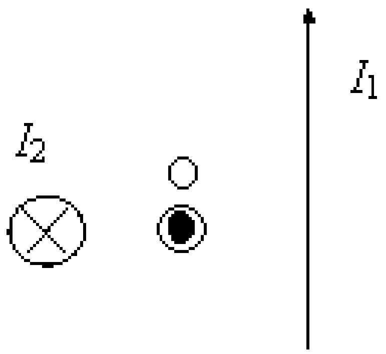
(Ответ: I=21,5 А.)

Задача 10. Прямой проводник АС длиной 20 см и массой 5 г подвешен горизонтально (см. рисунок) на двух легких нитях ОА и ОС в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен перпендикулярно проводнику. Индукция поля равна 0,049 Тл. Какой ве-



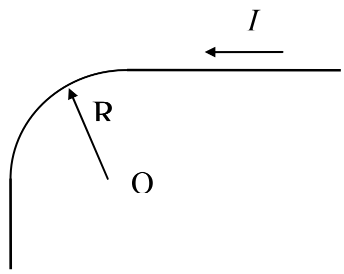
личины ток нужно пропустить по проводнику, чтобы одна из нитей разорвалась? Каждая нить выдерживает нагрузку не более 0,039 Н. (Ответ: I>3 А.)

Задача 11. Два взаимно перпендикулярных длинных провода, по которым текут равные токи силой I=10 А, находятся на расстоянии 2 см друг от друга, как показано на рисунке. Найти величину вектора индукции магнитного поля B в точке «О», находящейся на равном расстоянии от каждого из проводов. (Ответ: B=0,28 мТл.)



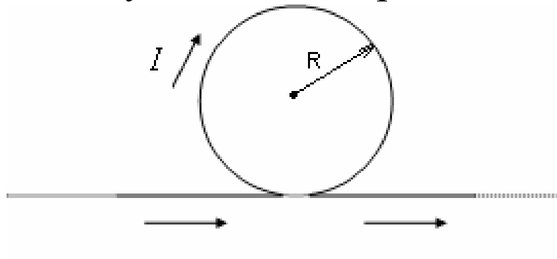
Задача 12. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура? (Ответ: в 1,15 раза.)

Задача 13. Длинный тонкий проводник с током I=100 А изогнут по дуге на 90 градусов, как показано на рисунке. Радиус кривизны в месте изгиба равен R=10 см. Определить индукцию магнитного поля в точке «О», создаваемую этим током. (Ответ: B=353 мкТл.)



Задача 14. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток силой I=50 А. Определить магнитную индукцию B в точке, удаленной на расстояние R=5 см от проводника. (Ответ: B=200 мкТл.)

Задача 15. Определить магнитную индукцию в центре петли радиуса R=10 см, образованной бесконечным тонким проводником с током. Форма петли изображена на рисунке. Ток в проводе I=100 А. (Ответ: B=428 мкТл.)



Тема 7. Закон полного тока. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле.

Примеры решения задач.

Задача 1. Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи I_1=10 А и I_2=15 А, текущие в одном направлении, и ток I_3=20 А, текущий в противоположном направлении.

Решение:

Согласно закону полного тока, циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов I_i, охватываемых контуром, то есть:

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

По условию задачи один из токов имеет направление, противоположное двум другим. В соответствии с этим можно записать:

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (10 + 15 - 20) = 6{,}28 \text{ мкТл·м.}$$

Ответ: $\oint_L B_l dl$ = 6,28 мкТл·м.

Задача 2. Какую работу надо затратить на перемещение проводника длиной l=0,4 м с током 21 А в однородном магнитном поле с индукцией 1,2 Тл на расстояние d=0,25 м? Проводник движется перпендикулярно к силовым линиям поля.

Решение:

Площадь, пересекаемая проводником при его движении перпендикулярно силовым линиям магнитного поля, будет равна $S=l\cdot d$. Магнитный поток через поверхность, пересекаемую проводником, будет равен $\Delta\Phi=B\cdot S$. Тогда работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна $A=I\Delta\Phi=IBld=21\cdot1{,}2\cdot0{,}4\cdot0{,}25=2{,}52$ Дж.

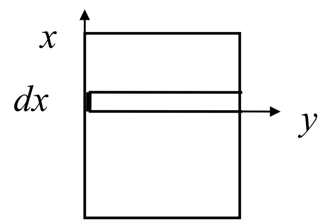
Ответ: A=2,52 Дж.

Задача 3. Квадратная рамка со стороной a=2 см, по которой протекает ток силой I=8 А, находится в неоднородном магнитном поле, изменяющемся в пространстве по закону $B_z=kx,$ где k=2 Тл/м, $B_y=B_x=0$. Плоскость рамки перпендикулярна линиям индукции поля. Одна из сторон рамки совпадает с осью y, вторая - с осью x, вершина рамки находится в начале координат. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно повернуть рамку вокруг оси y таким образом, чтобы силовые линии поля лежали в плоскости рамки?

Решение:

При медленном повороте рамки в магнитном поле индукционными токами можно пренебречь и считать ток в контуре неизменным. Работа по перемещению рамки с током в магнитном поле может быть найдена из соотношения $A=I\Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока. Так как по условию задачи в конечном положении плоскость рамки параллельна силовым линиям поля, то магнитный поток в конечном положении рамки равен нулю. Следовательно, изменение магнитного потока будет равно его первоначальному значению, при котором ориентация рамки перпендикулярна силовым линиям поля, то есть $\Delta\Phi=\Phi_0$.

Для вычисления магнитного потока Φ_0 разделим плоскость рамки на узкие полоски шириной dx, параллельные оси y (см. рисунок). Площадь каждой полоски будет равна $ds=a\cdot dx$. Магнитный поток через одну из таких полосок, находящуюся на расстоянии x от оси y, будет равен



$$d\Phi= B_z(x)\, ds=kxa\, dx.$$

Интегрируя, находим полный поток магнитной индукции через площадь рамки:

$$\Phi_0 = \int_0^a kxa\, dx = \frac{ka^3}{2}.$$

Окончательно имеем :

$$A = I\cdot \Delta\Phi = I\,\Phi_0 = Ika^3/2.$$

Подставляя численные значения, получим A=64 мкДж.

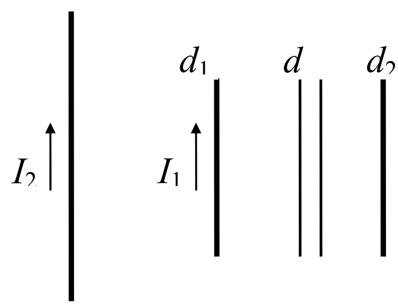
Ответ: A=64 мкДж.

Задача 4. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии d_1=10 см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи I_1=30 А и I_2=20 А. Какую работу A_1 нужно совершить (на единицу длины проводников), чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния d_2=20 см?

Решение:

Каждый из проводников находится в магнитном поле, создаваемом другим проводником. Работа A, которую нужно совершить, чтобы переместить проводник с током I_1 и длиной l параллельно самому себе в плоскости, проходящей через оба проводника, будет равна: $A=I_1\cdot\Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ - пересекаемый этим проводом магнитный поток.

Заметим, что движение этого провода происходит в магнитном поле, создаваемом током I_2. Значение магнитной индукция B, создаваемой длинным прямым проводом, определяется выражением: $B(x) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$, где x - расстояние от провода до точки наблюдения.



Для определения величины $\Delta\Phi$ воспользуемся рисунком и рассмотрим слой толщиной dx и длиной l, находящийся на расстоянии x от провода с током I_2. Магнитный поток $d\Phi$, пронизывающий этот слой, будет равен: $d\Phi=B(x)ds$, где $ds=ldx$ - площадь слоя. Подставляя сюда выражение для магнитной индукции $B(x)$, получаем:

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} l dx .$$

Интегрируя это соотношение в пределах от d_1 до d_2, находим:

$$\Delta\Phi = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi} ln\frac{d_2}{d_1} .$$

Так как по условию задачи требуется определить работу A_1 по перемещению единицы длины проводника $A_1=A/l$, то для работы A_1 получаем выражение:

$$A_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} ln\frac{d_2}{d_1}.$$

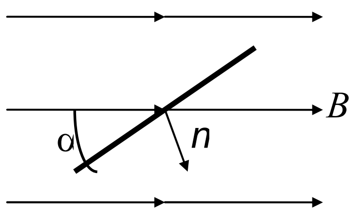
Подставляя числовые значения, находим A_1=83 мкДж/м.

Ответ: A_1=83 мкДж/м.

Задача 5. Круглый плоский виток радиусом R=10 см, по которому течет ток I=100А, находится в однородном магнитном поле с индукцией B=0,2 Тл. Плоскость витка составляет угол $\alpha=30^0$ с направлением магнитного поля. Определить работу A., которую необходимо затратить, чтобы удалить виток за пределы поля.

Решение:

Положение витка в области магнитного поля изображено на рисунке. Работа по перемещению проводника с током I в магнитном поле определяется выражением А=$I\cdot\Delta\Phi$, где $\Delta\Phi$ – пересекаемый проводом магнитный поток.



Так как виток удаляется за пределы поля, то $\Delta\Phi=\Phi_0$ где Φ_0 - магнитный поток, пронизывающий виток до начала движения. По условию задачи плоскость рамки составляет угол α с направлением поля; следовательно, угол между нормалью к рамке и направлением линий индукции составляет $\beta=\pi/2-\alpha$. Магнитный поток равен: $\Phi=BS\cdot\cos\beta$, где $S=\pi r^2$ - площадь витка. Окончательно получаем, что:

$$A=IB\pi r^2\cos(\pi/2-\alpha)=\mathrm{I}\mathrm{B}\pi \mathrm{r}^2\sin\alpha.$$

Подставляя численные значения, найдем A=314 мДж.

Ответ: A=314 мДж.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. Два параллельных провода длиной 1 м каждый расположены на расстоянии 2 см друг от друга. По проводам текут токи I_1=I_2 =100 А. Направление токов совпадают. Какую работу A нужно совершить, чтобы раздвинуть провода на расстояние 10 см? (Ответ: A=3,2 мДж.)

Задача 7. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на некотором расстоянии друг от друга. По проводникам текут одинаковые токи в одном направлении. Найти токи I_1 и I_2, текущие по каждому проводнику, если известно, что для того, чтобы раздвинуть эти проводники на вдвое большее расстояние, пришлось совершить работу (на единицу длины проводника) A_1 =55 мкДж/м. (Ответ: I_1=I_2=20 А.)

Задача 8. Круговой контур помещен в однородное магнитное поле так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля. Напряженность магнитного поля H=150 кА/м. По контуру течет ток I=2 А. Радиус контура R=2 см. Какую работу A надо совершить, чтобы повернуть контур на угол $\varphi=90^0$ вокруг оси, совпадающей с диаметром контура? (Ответ: A=0.5 мДж.)

Задача 9. Квадратная рамка с током I=0,9 А расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течет ток I_0=5 А. Сторона рамки a=8 см. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние, которое в n=1,5 раза больше стороны рамки. Найти силу Ампера F, действующую на рамку, и работу A, которую нужно совершить при медленном повороте рамки вокруг ее оси на 180^0. (Ответ: F=0,45 мкН, A=0,1 мкДж.)

Задача 10. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,5 Тл равномерно движется проводник длиной l=10 см. По проводнику течет ток I=2 А. Скорость движения проводника равна v=20 см/с и направлена перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти работу A перемещения проводника за время t=10 с и мощность P, затраченную на это перемещение. (Ответ: A=0,2 Дж, P=20 мВт.)

Задача 11. По сечению проводника равномерно распределен ток плотностью j=2 МА/м^2. Найти циркуляцию вектора напряженности магнитного поля вдоль окружности радиусом R=5 мм, проходящей внутри проводника и ориентированной так, что ее плоскость составляет угол $\alpha=30^0$ с вектором плотности тока. (Ответ: $\oint H_l dl = 78{,}6\text{А.}$)

Задача 12. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,01 Тл находится прямой провод длиной l=8 см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток I=2 А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние S=5 см. Найти работу A сил поля.

(Ответ: A=80 мкДж.)

Задача 13. Виток радиусом 2 см находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл. Плоскость витка перпендикулярна линиям индукции поля. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть виток вокруг диаметра на 90^0, если ток в витке равен 8 А? (Ответ: $A=2\ 10^{-3}$ Дж.)

Задача 14. По кольцу, сделанному из тонкого гибкого провода радиусом R=10 см, течет ток I=100 А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле с индукцией B=0,1 Тл, по направлению совпадающее с направлением B_1 собственного магнитного поля кольца. Определить работу A внешних сил, которые, действуя на провод, деформировали его и придали ему форму квадрата. Сила тока при этом поддерживалась неизменной. Работой против упругих сил пренебречь. (Ответ: A=67,5 мДж.)

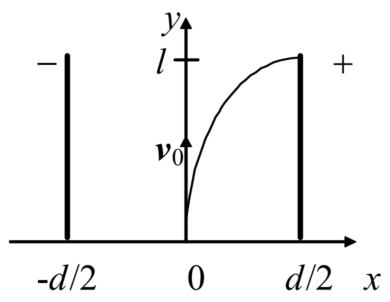
Задача 15. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной a, равной 10 см, течет ток I=20 А, сила которого поддерживается неизменной. Плоскость квадрата составляет угол $\alpha=20^0$ с линиями индукции однородного магнитного поля (B=0,1 Тл). Вычислить работу A, которую нужно совершить для того, чтобы удалить провод за пределы поля. (Ответ: A=6,84 мДж.)

Тема 8. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях.

Примеры решения задач.

Задача 1. Электрон влетел в плоский конденсатор, находясь на одинаковом расстоянии от каждой пластины и имея скорость v_0=10 Мм/с, направленную параллельно пластинам. Расстояние между пластинами равно d=10 см. Какую наименьшую разность потенциалов U нужно приложить к пластинам, чтобы электрон не вылетел из конденсатора?

Решение:



По условию задачи скорость электрона много меньше скорости света $v_0 \ll c$. Поэтому движение электрона рассматриваем как нерелятивистское. Выберем систему координат как показано на рисунке. Движение электрона представляет собой суперпозицию равномерного движения с постоянной скоростью v_0 вдоль оси y и равноускоренного движения вдоль оси x под действием электростатического поля. Время пролета электрона между пластинами конденсатора вдоль оси y равно $t=l/v_0$, где l - длина пластин. В положительном направлении оси x на электрон действует сила $F=eE=eU/d$, которая сообщает ему ускорение $a=F/m=eU/md$. Здесь e и m обозначают, соответственно, заряд и массу электрона. Чтобы попасть на край пластины конденсатора, электрон за время t должен сместиться вдоль оси x на расстояние $d/2$. Согласно закону равноускоренного движения $d/2=at^2/2$. Подставляя сюда выражения для t и a, получаем следующее соотношение:

$$d=\frac{eUl^2}{mdv_0^2}.$$

Тогда, для искомой минимальной разности потенциалов получаем формулу:

$$U=\frac{md^2v_0^2}{el^2}=22{,}7 \text{ В}$$

Ответ: U=22,7 В.

Задача 2. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U=600 В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией B=0,3 Тл и начал двигаться по окружности. Вычислить ее радиус R.

Решение:

Чтобы частица двигалась по окружности, на нее должна действовать центростремительная сила, роль которой в данной задаче играет сила Лоренца. Следовательно, второй закон Ньютона, описывающий движение частицы, следует записать в виде:

$$\frac{m_p v^2}{R} = evB. \qquad (1)$$

Отсюда для радиуса окружности получаем выражение $R=m_P v/eB$. Чтобы найти входящую в последнее выражение скорость, учтем, что магнитное поле не совершает работы над двигающейся в нем заряженной частицей. Поэтому, кинетическая энергия, полученная протоном при прохождении ускоряющей разности потенциалов U, будет сохраняться и при дальнейшем его движении в магнитном поле. Закон сохранения энергии записывается в виде:

$$eU = m_p v^2/2.$$

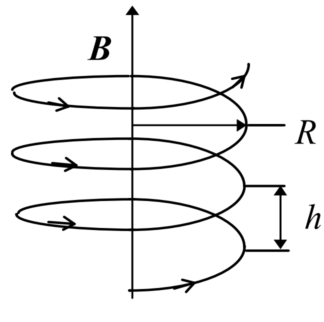
Следовательно, $m_P v=(2m_p eU)^{1/2}$. Подставляя это соотношение в формулу (1), получаем окончательное выражение для радиуса искомой окружности:

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_p U}{e}} = 11{,}8 \text{ мм}.$$

Ответ: R=11,8 мм.

Задача 3. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией B=9 мТл по винтовой линии, радиус которой равен R=1 см и шаг h=7,8 см. Определить период T обращения электрона и его скорость v.

Решение:



Траектория движения электрона схематически показана на рисунке. Она представляет собой результат двух движений: вращения по окружности под действием силы Лоренца в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и равномерного движения вдоль направления поля. Второй закон Ньютона, описывающий вращательное движение электрона, записывается в виде:

$$ev_\perp B = \frac{m_e v_\perp^2}{R}.$$

Отсюда получаем выражение для компоненты скорости вращения электрона по окружности $v_\perp = \frac{e}{m_e} BR$. Следовательно, период обращения электрона по окружности можно найти по формуле:

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = 2\pi \frac{m_e}{eB} = .$$

Скорость движения электрона вдоль магнитного поля находим как:

$$v_\parallel = \frac{h}{T} = \frac{heB}{2\pi m_e}.$$

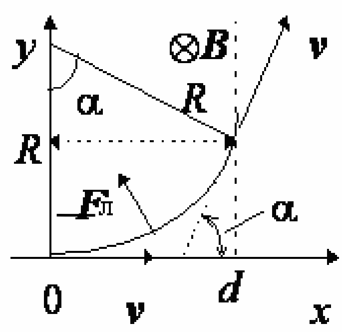
С учетом полученных выражений, для полной скорости получаем следующую формулу:

$$v = \sqrt{v_\perp^2 + v_\parallel^2} = \frac{e}{m_e} B \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = .$$

После подстановки числовых значений в выражения для T и v, находим: T=3,97 нс и v=25,2 Мм/с.

Ответ: T=3,97 нс, v=25,2 Мм/с.

Задача 4. Протон, ускоренный разностью потенциалов U=500 кВ, пролетает поперечное однородное магнитное поле с индукцией B=0,51 Тл. Толщина области с полем d=10 см. Найти угол α отклонения протона от первоначального направления движения.



Решение:

Пусть область магнитного поля имеет толщину d вдоль оси x и скорость протона $\boldsymbol{v}$ при входе в область поля также направлена вдоль оси x, как показано на рисунке. Траектория движения протона в области магнитного поля представляет собой дугу окружности, вследствие чего вектор скорости протона на выходе из поля отклонится на угол α от первоначального направления. При пролете частицей с зарядом e ускоряющей разности потенциалов U, над ней была совершена работа eU. Эта работа пошла на сообщение частице кинетической энергии. Следовательно, из закона сохранения энергии следует, что $eU=\mathrm{m_p}v^2/2$. Отсюда для модуля скорости протона получаем выражение $v=(2eU/m_\mathrm{p})^{1/2}$. При движении частицы в области с магнитным полем на нее действует сила Лоренца $\boldsymbol{F}_\text{л}$, которая играет роль центростремительной силы. Следовательно, второй закон Ньютона можно записать в виде: $m_pv^2/R.=evB$. Тогда, для радиуса дуги окружности, описываемой протоном, получаем выражение $R=m_\mathrm{p}v/eB$. Напомним, что так как магнитное поле не совершает работы, то величина модуля скорости протона не изменяется при пролете области с магнитным полем. Из рисунка видно, что:

$$\sin\alpha=d/R=dB\sqrt{\frac{e}{2m_pU}}\,.$$

Следовательно, для искомого угла α окончательно получаем:

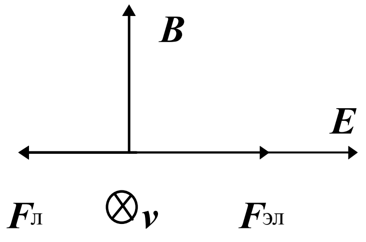
$$\alpha=\arcsin(dB(e/2m_pU)^{1/2})=30^0.$$

Ответ: $\alpha=30^0$.

Задача 5. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B=0{,}1$ Тл приложено электрическое поле напряженностью $E=100$ кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость v частицы.

Решение:

Взаимная ориентация векторов магнитного $\boldsymbol{B}$ и электрического $\boldsymbol{E}$ полей, а также вектора скорости частицы $\boldsymbol{v}$ показана на рисунке. При движении в области полей частицы, имеющей



электрический заряд q, на нее действуют две силы: сила Лоренца $\boldsymbol{F}_л$ со стороны магнитного поля и сила Кулона $\boldsymbol{F}_{эл}$. со стороны электростатического поля. Из условия задачи следует, что ускорение частицы равно нулю. Это означает, что сумма всех сил, действующих на частицу, также равна нулю: $\boldsymbol{F}_л+\boldsymbol{F}_{эл}=0$. В явном виде это уравнение имеет вид:

$$q[\boldsymbol{v},\boldsymbol{B}] + q\boldsymbol{E} = 0.$$

После проектирования на направление электрического поля уравнение запишется как $-vB+E=0$. Отсюда для искомой скорости частицы получаем следующее простое выражение: $v=E/B=1$ Мм/с.

Ответ: v=1 Мм/с.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. Электрон с начальной скоростью v_0=3 Мм/с влетел в однородное электрическое поле напряженностью E=150 В/м. Вектор начальной скорости электрона перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Найти: 1) силу F, действующую на электрон; 2) ускорение a, приобретаемое электроном; 3) скорость электрона через время t=0,1 мкс. (Ответ: $F=2{,}4\cdot10^{-17}$ Н; $a=2{,}63\cdot10^{13}$ м/с^2; v=3,99 Мм/с.)

Задача 7. Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью v_0=10 Мм/с, направленной параллельно пластинам. На сколько приблизится электрон к положительно заряженной пластине за время движения внутри конденсатора (поле считать однородным), если расстояние d между пластинами равно 16 мм, разность потенциалов U=30 В и длина l пластин равна 6 см?
(Ответ: 5,94 мм.)

Задача 8. Электрон влетел в плоский конденсатор, имея скорость v_0=10 Мм/с, направленную параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составило угол α=35° с первоначальным направлением скорости. Определить разность потенциалов U между пластинами (поле считать однородным), если длина l пластин равна 10 см и расстояние d между пластинами равно 2 см. (Ответ: U=79,6 В.)

Задача 9. Определить силу Лоренца F, действующую на электрон, влетевший со скоростью v=4 Мм/с в однородное магнитное поле под углом $\alpha=30^{\circ}$ к линиям индукции. Магнитная индукция B поля равна 0,2 Тл. (Ответ: F=64 фН.)

Задача 10. Вычислить радиус R дуги окружности, которую описывает протон в магнитном поле с индукцией B=15 мТл, если скорость v протона равна 2 Мм/с. (Ответ: R=1,39 м)

Задача 11. В однородном магнитном поле с индукцией B=2 Тл движется протон. Траектория его движения представляет собой винтовую линию с радиусом R=10 см и шагом h=60 см. Определить кинетическую энергию W протона. (Ответ: W=586,2 фДж.)

Задача 12. Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U=800 В, влетает в однородные, скрещенные под прямым углом магнитное (B=50 мТл) и электрическое поля. Определить напряженность E электрического поля, если протон движется в скрещенных полях прямолинейно. (Ответ: E=19,58 кВ/м.)

Задача 13. Протон и электрон, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона R_1 больше радиуса кривизны траектории электрона R_2? (Ответ: $R_1/R_2=m_p/m_e$=1836.)

Задача 14. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны траектории протона R_1 больше радиуса кривизны траектории электрона R_2 ? (Ответ: $R_1/R_2 =(m_p/m_e)^{1/2}$=42,8.)

Задача 15. Магнитное поле напряженностью $H=8\cdot10^3$ А/м и электрическое поле напряженностью E=10 В/см направлены одинаково. Электрон влетает в такое электромагнитное поле со скоростью $v=10^5$ м/с. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_t и полное a ускорения электрона. Задачу решить для случаев: 1) скорость электрона направлена параллельно силовым линиям; 2) скорость электрона направлена перпендикулярно силовым линиям полей. (Ответ: 1) $a=a_t=eE/m_e=1{,}76\cdot10^{14}$ м/с^2 ; 2) $a=a_n= e/m_e$ (

$(vB)^2 + E^2\,)^{1/2}$ =2,5·10^{14} м/с^2.)

Тема 9. Электромагнитная индукция.

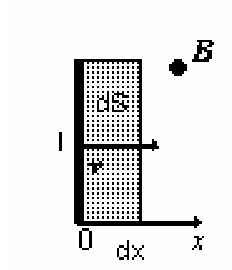
Примеры решения задач.

Задача 1. Прямой провод длиной l=40 см движется в однородном магнитном поле со скоростью v=5 м/с перпендикулярно линиям индукции. Разность потенциалов между концами провода U=0,6 В. Вычислить индукцию магнитного поля B.

Решение:

Разность потенциалов между концами провода, возникающая при его движении в магнитном поле, может быть определена по соотношению:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt},$$



где Φ - магнитный поток через площадку, описываемую проводником в магнитном поле. Поскольку проводник расположен перпендикулярно линиям магнитной индукции и движется перпендикулярно им, изменение магнитного потока может быть определено как:

$$d\Phi = BdS = Bldx.$$

Тогда искомая разность потенциалов может быть определена как:

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv.$$

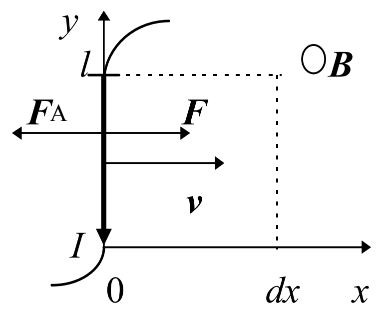
Откуда: $B = \dfrac{U}{lv}$.

Ответ: B=0,3 Тл.

Задача 2. В однородном магнитном поле с индукцией B=1 Тл находится прямой провод длиной l=20 см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление R всей цепи равно 0,1 Ом. Найти силу F, которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью v=2,5 м/с.

Решение:

Выберем систему координат как показано на рисунке. Согласно закону электромагнитной индукции, для ЭДС индукции имеем выражение E_i=-$d\Phi/dt$, где изменение магнитного потока $d\Phi$ определяется выражением $d\Phi=BdS=Bldx=Blvdt$. Тогда, для



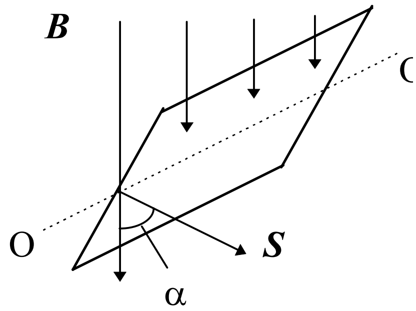
ЭДС индукции получаем E_i=-Blv. Из закона Ома для замкнутой цепи находим текущий по проводу ток $I=E_i/R=-Blv/R$. (знак минус означает, что ток течет против положительного направления оси y). При движении проводника с током на него действует сила Ампера $d\boldsymbol{F}_A=I[d\boldsymbol{l},\boldsymbol{B}]$. Отсюда следует, что $d\boldsymbol{F}_A=\boldsymbol{i}IBdl$. Тогда, интегрируя по длине провода, получаем $\boldsymbol{F}_A= -\boldsymbol{i}IBl$. Условие равномерного движения провода имеет вид $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_A=0$. Отсюда для искомой силы получаем выражение $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}IBl$. Следовательно, величина силы рассчитывается по формуле: $F=Ibl=v(lB)^2/R$=1 Н.

Ответ: F=1 Н.

Задача 3. Рамка площадью S=200 см^2 равномерно вращается с частотой n=10 с$^{-1}$ относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля B=0,2 Тл. Каково среднее значение ЭДС индукции $\langle E_i \rangle$ за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменяется от нуля до максимального значения.

Решение**:**

Пусть рамка вращается относительно оси О-О, а магнитное поле $\boldsymbol{B}$ пронизывает рамку и направлено сверху вниз, как показано на рисунке. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции дается выражением:



E_i= -$d\Phi/dt$,

где $\Phi = \boldsymbol{BS} = BS\cos\alpha$,

(α - угол между направлением магнитного поля $\boldsymbol{B}$ и направлением вектора $\boldsymbol{S}$, перпендикулярного к плоскости рамки). Тогда, для ЭДС индукции получаем формулу $E_i = BS\sin\alpha \cdot d\alpha/dt$. Отсюда вытекает, что $Edt = BS\sin\alpha \cdot d\alpha$. Интегрируя это уравнение, находим:

$$\int_0^{T/4} E_i dt = BS \int_{\pi/2}^{0} \sin\alpha d\alpha .$$

С учетом полученного соотношения, для среднего значения ЭДС индукции имеем окончательное выражение:

$$\langle E_i \rangle = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} E_i dt = \frac{4BS}{T} \int_{\pi/2}^{0} \sin\alpha d\alpha = -4nBS = -0{,}16 \text{ В}.$$

Здесь знак минус определяет направление индукционного тока.

Ответ: $\langle E_i \rangle = 0.16$ В.

Задача 4. С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на $\Delta I = 0{,}1$ А в 1 с. Индуктивность L катушки равна 0,01 Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции $\langle E_{si} \rangle$.

Решение

Среднее значение ЭДС самоиндукции определяется выражением:

$$\langle E_{si} \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t E_{si} dt .$$

ЭДС самоиндукции связана с током, протекающим через катушку, выражением:

$$E_{si} = -L \frac{dI}{dt} .$$

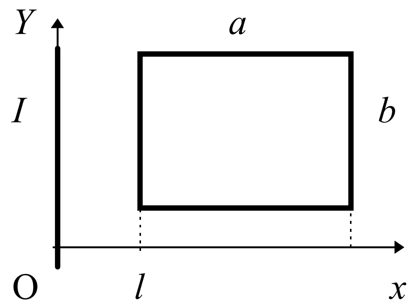
Из этого выражения следует, что $E_{si} dt = -LdI$. Интегрируя это соотношение, для среднего значения ЭДС самоиндукции получаем выражение:

$$\langle E_{si} \rangle = -\frac{L}{t} \int_0^{\Delta I} dI = -\frac{L\Delta I}{t} = -1 \text{ мВ}.$$

Ответ: $\langle E_{si}\rangle=-1$ мВ.

Задача 5. Вычислить взаимную индуктивность длинного прямого провода и прямоугольной рамки со сторонами a и b. Рамка и провод лежат в одной плоскости, причем ближайшая к проводу сторона рамки длиной b параллельна проводу и отстоит от него на расстояние l.

Решение:



Пусть рамка и провод расположены в плоскости x-y, как показано на рисунке. Пронизывающий рамку поток магнитного поля Ф, созданного протекающим по прямому проводу током I, связан с током выражением $\Phi=L_{12}I$, где L_{12}- коэффициент взаимной индуктивности рамки и прямого провода. Следовательно, $L_{12}=\Phi/I$. Найдем поток Ф, пронизывающий рамку. Поток через участок рамки шириной dx по определению равен $d\Phi=BdS=Bbdx$, где $B(x)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2I}{x}$ - индукция магнитного поля, созданного прямым током I, на расстоянии x от провода. После интегрирования по всей ширине рамки получаем выражение для полного потока через рамку:

$$\Phi=\int_{l}^{l+a}Bbdx=\frac{\mu_0}{4\pi}2Ib\int_{l}^{l+a}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln(1+\frac{a}{l})$$

Следовательно, искомый коэффициент взаимной индуктивности рамки и провода выражается формулой: $L_{12}=\dfrac{\mu_0 b}{2\pi}\ln(1+\dfrac{a}{l})$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,4 Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной l=10 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов U на концах стержня при частоте вращения n=16 с$^{-1}$. (Ответ: U =201 мВ.)

Задача 7. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,35 Тл равномерно с частотой n=480 мин$^{-1}$ вращается рамка, содержащая N=500 витков площадью S=50 см^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции $E_{i\ max}$, возникающую в рамке. (Ответ: $E_{i\ max}$=44 В.)

Задача 8. Рамка площадью S=100 см^2 содержит N=10^3 витков провода сопротивлением R_1=12 Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление R_2=20 Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле (B=0,1 Тл) с частотой n=8 с$^{-1}$. Определить максимальную мощность P_{max} переменного тока в цепи. (Ответ: P_{max}=79Вт)

Задача 9. Проволочный виток радиуса r=4 см с сопротивлением R=0,01 Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией B=0,04 Тл. Плоскость рамки составляет угол α=30^0 с линиями индукции поля. Какое количество электричества Q протечет по витку, если магнитное поле исчезнет ? (Ответ: Q=10 мКл.)

Задача 10. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества Q=10 мкКл. Определить магнитный поток Ф, пересеченный кольцом, если сопротивление R цепи гальванометра равно 30 Ом. (Ответ: Ф=0,3 мВб.)

Задача 11. Рамка из провода сопротивлением R=0,01 Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B=0,05 Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярно линиям индукции. Площадь рамки S=100 см^2. Найти, какое количество электричества Q протечет через рамку за время поворота ее на угол α=30° в следующих трех случаях: 1) от α_0=0 до α_1=30°; 2) от α_1 до α_2=60°; 3) от α_2 до α_3=90°. (Ответ: Q_1=25 мКл, Q_2=18,3 мКл, Q_3=7 мКл.)

Задача 12. Тонкий медный провод массой m=1 г согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле (B=0,1 Тл) так, что его плоскость перпендикулярна линиям индукции поля. Определить количество электричества Q, которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию. (Ответ: Q=41 мКл.)

Задача 13. Индуктивность L катушки равна 2 мГн. Ток частотой ν= 50 Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle E_{si} \rangle$, возникающую за интервал времени Δt, в течение которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения. Амплитудное значение силы тока I_0=10 А. (Ответ: $\langle E_{si} \rangle$=4 В.)

Задача 14. Индуктивность L соленоида длиной l=1 м, намотанного в один слой на немагнитный каркас, равна 1,6 мГн. Площадь S сечения соленоида равна 20 см^2. Определить число n витков на каждом сантиметре длины соленоида. (Ответ: n=8 см$^{-1}$.)

Задача 15. Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется с быстротой $\Delta I/\Delta t$=5 А/с, во второй катушке возникает ЭДС индукции E_i=0,1 В. Определить коэффициент L_{12} взаимной индукции катушек. (Ответ: L_{12}=20 мГн.)

Тема 10. Энергия магнитного поля. Электромагнитные колебания.

Примеры решения задач.

Задача 1. Конденсатор, емкость которого C=500 пФ, соединен параллельно с катушкой индуктивности длиной l=40 см и площадью сечения S, равной 5 см^2. Катушка содержит N=1000 витков. Сердечник немагнитный. Найти период T колебаний.

Решение:

Период T находим, используя формулу Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, где L - индуктивность катушки. Индуктивность катушки (соленоида) равна $L = \mu\mu_0 n^2 lS$, где n - число витков на единицу длины обмотки, то есть $n=N/l$. Так как по условию задачи сердечник немагнитный, то μ=1. Окончательно имеем:

$$T = 2\pi N \sqrt{\frac{\mu_0 SC}{l}}.$$

Подставляя численные значения, получаем T=5,57 мкс.

Ответ: T=5,57 мкс.

Задача 2. Изменение со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид: $U=50\cdot\cos(10^4\pi t)$ (значения всех величин указаны в системе СИ). Емкость конденсатора равна C=0,1 мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность L контура, и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

Решение:

В колебательном контуре без затухания напряжение на конденсаторе и ток в цепи изменяются по гармоническому закону. Если время отсчитывать от момента, когда напряжение на конденсаторе максимально, то можно записать $U=U_0\cos\omega t$, где U_0 - амплитуда, ω – круговая частота. Из сравнения этого выражения с зависимостью, приведенной в условии задачи, получаем $\omega=10^4\pi$. Так как круговая частота и период связаны соотношением $T=2\pi/\omega$, то, после подстановки чисел, получаем $T=2\cdot10^{-4}$ с. Индуктивность контура L найдем, используя формулу Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, откуда $L=T^2/4\pi^2C$. Длину волны, соответствующую найденному периоду, находим из выражения $\lambda=cT$, где c - скорость света. Подставляя численные значения, находим $L = 4\cdot10^{-8}/(4\pi^2 10^{-7})$=0,01 Гн., $\lambda=3\cdot10^8\cdot2\cdot10^{-4}=6{,}10^4$ м.

Ответ: $T=2\cdot10^{-4}$ с, L=0,01 Гн, λ=60 км.

Задача 3. Соленоид длиной l=50 см и площадью поперечного сечения S=2 см^2 имеет индуктивность $L=2\cdot10^{-7}$ Гн. При какой силе тока объемная плотность энергии магнитного поля w внутри соленоида равна 10^{-3} Дж/м^3?

Решение:

Полная энергия магнитного поля контура дается выражением:

$$W = LI^2/2,$$

где L - индуктивность соленоида, I - ток, протекающий по контуру. Объемная плотность энергии поля по определению равна:

$$w = W/V.$$

Здесь V - объем пространства внутри контура. Объем пространства, заключенного внутри соленоида, равен $V=Sl$. Следовательно, для объемной плотности энергии имеем соотношение:

$$w = \frac{1}{2}\frac{LI^2}{Sl}.$$

Отсюда получаем окончательное выражение для искомой силы тока:

$$I = \sqrt{\frac{2Slw}{L}} = 1\ \text{А}.$$

Ответ: I=1 А.

Задача 4. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет n=10 витков на каждый сантиметр длины. Определить плотность энергии w поля, если по обмотке течет ток I=16 А.

Решение:

Объемная плотность энергии однородного магнитного поля дается выражением:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Индукция магнитного поля тороида находится как $B=\mu_0\mu nI$. Тогда, для искомой плотности энергии поля получаем следующее выражение:

$$w = \mu_0\mu n^2 I^2/2 = 161{,}3\ \text{Дж/м}^3.$$

Здесь учтено, что т. к. сердечник немагнитный, то μ=1.

Ответ: w=161,3 Дж/м^3.

Задача 5. На тор из магнетика намотано N=500 витков провода. Найти энергию магнитного поля, если при токе I=2 А магнитный поток через сечение тора равен Φ=1 мВб.

Решение:

Проводник с индуктивностью L, по которому протекает ток

I, обладает энергией $W=LI^2/2$, которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле. Полный магнитный поток через контур, то есть потокосцепление, создаваемый протекающим по нему током, равен $\Psi=LI$, где $\Psi=N\Phi$. Следовательно, $LI=N\Phi$. Отсюда находим, что $L=N\Phi/I$. Тогда, для искомой энергии магнитного поля окончательно получаем выражение:

$$W=\frac{1}{2}N\Phi I=0{,}5\ \text{дЖ}$$

Ответ: W=0,5 дЖ.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. По обмотке соленоида индуктивностью L=0,2 Гн течет ток I=10 А. Определить энергию W магнитного поля соленоида. (Ответ: W=10 Дж.)

Задача 7. Соленоид содержит N=1000 витков. Сила тока I в его обмотке равна 1 А, магнитный поток Ф через поперечное сечение соленоида равен 0.1 мВб. Вычислить энергию W магнитного поля соленоида. (Ответ: W=50 мДж.)

Задача 8. Катушка индуктивностью L=1 мкГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром D=20 см каждая, соединены параллельно. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Определить период T колебаний. (Ответ: T =33,2 нс.)

Задача 9. Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами площадью S=100 см^2 каждая и катушки с индуктивностью L=1 мкГн, резонирует на волну длиной λ=10 м. Определить расстояние d между пластинами конденсатора. (Ответ: d=3.14 мм.)

Задача 10. Уравнение изменения со временем тока в колебательном контуре имеет вид $I=-0{,}02\sin(400\pi t)$ (значения всех величин указаны в системе СИ). Индуктивность контура равна L=1 Гн. Найти период T колебаний, емкость C контура, максимальную энергию $W_{м}$ магнитного поля и максимальную энергию $W_{эл}$ электрического поля. (Ответ: T=5 мс; C=0,63 мкФ; $W_{м}$=0,2 мДж; $W_{эл}$=0,2 мДж.)

Задача 11. Найти отношение энергии $W_м/W_{эл}$ магнитного поля колебательного контура $W_м$ к энергии его электрического поля $W_{эл}$ для момента времени $t=T/8$, где T - период колебаний. (Ответ: $W_м/W_{эл}=1$.)

Задача 12. Через катушку, индуктивность которой L=21 мГн, течет ток, изменяющийся со временем по закону $I=I_0\sin(\omega t)$, где I_0=5 А, T=0,02 с. Найти зависимость от времени энергии магнитного поля $W(t)$ катушки. (Ответ: $W(t)=0,263\sin^2(100\pi t)$ Дж.)

Задача 13. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L=0,2 Гн и конденсатора емкостью C=20 мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения U_0=4 В. Какими будут ток I, напряжение U и заряд Q в моменты времени, когда отношение энергии электрического и магнитного поля $W_{эл}/W_м$ равно 1/2 ? (Ответ: $I=-3,24\cdot10^{-2}$А, U=-2,35 В, $Q=4,7\cdot10^{-5}$ Кл.)

Задача 14. Какую индуктивность L надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости C=2 мкФ получить частоту ν=1000 Гц? (Ответ: L=12,7 мГн.)

Задача 15. Катушка с индуктивностью L=30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин S=0,01 м^2 и расстоянием между ними d=0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны λ=750 м. (Ответ: ε=6.)

СОДЕРЖАНИЕ

Инна Альбертовна Анищенко
Анатолий Андреевич Задерновский
Михаил Митрофанович Зверев
Борис Владимирович Магницкий
Юрий Константинович Фетисов
Андрей Юрьевич Пыркин
Лидия Владимировна Соломатина.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебное пособие