Дальневосточный государственный технический университет
(ДВПИ им. В. В. Куйбышева)

ФИЗИКА

Часть 2

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебно-методическое пособие для студентов-заочников

Владивосток

2004

Одобрено научно-методическим советом университета

УДК 538.3

Электричество и магнетизм: Учебно-метод. пособие / Сост. Л. П. Ляхова, Л. П. Осуховская, И. А. Терлецкий. – Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2004. – 99 с.

В настоящем пособии даны основные законы и понятия разделов физики «Электростатика», « Постоянный электрический ток», «Электромагнетизм», приведены примеры решения типовых задач по указанным разделам, а также задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов заочного обучения по техническим специальностям.

Печатается с оригинал-макета, подготовленного авторами.

Содержание

Цель настоящего учебно-методического пособия – оказать помощь студентам-заочникам технических специальностей ДВГТУ в изучении курса физики.

Материал курса физики разделен на четыре контрольные работы. Перед каждым контрольным заданием даются пояснения к рабочей программе, приводятся краткое изложение вопросов теоретического курса, примеры решения задач. Кроме того, в пособии даны общие методические указания, рабочая программа, примерная схема решения задач и некоторые справочные материалы.

Общие методические указания

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом. Для облегчения этой работы кафедра физики организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы. Поэтому процесс изучения физики состоит из следующих этапов:

1) проработка установочных и обзорных лекций;
2) самостоятельная работа над учебниками и учебными пособиями;
3) выполнение контрольных работ;
4) прохождение лабораторного практикума;
5) сдача зачетов и экзаменов.

Таблица к контрольной работе № 2

Вариант	Номера задач									
1	201	211	221	231	241	251	261	271	281	291
2	202	212	222	232	242	252	262	272	282	292
3	203	213	223	233	243	253	263	273	283	293
4	204	214	224	234	244	254	264	274	284	294
5	205	215	225	235	245	255	265	275	285	295
6	206	216	226	236	246	256	266	276	286	296
7	207	217	227	237	247	257	267	277	287	297
8	208	218	228	238	248	258	268	278	288	298
9	209	219	229	239	249	259	269	279	289	299
10	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300

Контрольные работы позволяют закрепить теоретический материал курса. В процессе изучения физики студент должен выполнить четыре контрольные работы. Решение задач контрольных работ является проверкой степени усвоения студентом теоретического курса, а рецензии на работу помогают ему доработать и правильно освоить различные разделы курса физики. Перед выполнением контрольной работы необходимо внимательно ознакомиться с примерами решения задач по данной контрольной работе, уравнениями и формулами, а также со справочными материалами, приведенными в конце методических указаний.

Контрольные работы содержат каждая по десять задач. Вариант задания контрольной работы определяется в соответствии с последней цифрой шифра зачетной книжки по таблице для контрольных работ. Если, например, последняя цифра 5, то в контрольных работах студент решает задачи 205, 215, 225, 235, 245, 255, 265, 275, 285, 295. Номера задач к контрольной работе № 2 определяются по таблице.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1) указывать на титульном листе номер контрольной работы, наименование дисциплины, фамилию и инициалы студента, шифр зачетной книжки и домашний адрес;

2) контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поля для замечаний рецензента;

3) задачу своего варианта переписывать полностью, а заданные физические величины выписать отдельно, при этом все числовые величины должны быть переведены в одну систему единиц;

4) для пояснения решения задачи там, где это нужно, аккуратно сделать чертеж;

5) решение задачи и используемые формулы должны сопровождаться пояснениями;

6) в пояснениях к задаче необходимо указывать те основные законы и формулы, на которых базируется решение данной задачи;

7) при получении расчетной формулы для решения конкретной задачи приводить ее вывод;

8) задачу рекомендуется решить сначала в общем виде, т. е. только в буквенных обозначениях, поясняя применяемые при написании формул буквенные обозначения;

9) вычисления следует проводить с помощью подстановки заданных числовых величин в расчетную формулу. Все необходимые числовые значения величин должны быть выражены в СИ (см. справочные материалы);

10) проверить единицы полученных величин по расчетной формуле и тем самым подтвердить ее правильность;

11) константы физических величин и другие справочные данные выбирать из таблиц.

Контрольные работы, оформленные без соблюдения указанных правил, а также работы, выполненные не по своему варианту, не зачитывают.

При отсылке работы на повторное рецензирование обязательно представлять работу с первой рецензией.

Рабочая программа раздела «Электричество и магнетизм»

Электростатика. Электрический заряд. Закон сохранения заряда. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Напряженность поля точечного заряда. Принцип суперпозиции. Графическое изображение электростатического поля. Поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Гаусса. Поле равномерно заряженных тел: равномерно заряженной бесконечной плоскости, нити (цилиндра), сферы, шара.

Работа перемещения заряда в электрическом поле. Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциал электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда. Принцип суперпозиции для поля системы зарядов. Разность потенциалов. Эквипотенциальные поверхности.

Диполь во внешнем электростатическом поле. Диэлектрики. Поляризация диэлектриков. Поляризованность, диэлектрическая восприимчивость, диэлектрическая проницаемость вещества. Связь поляризованности с поверхностной плотностью связанных зарядов. Вектор электрического смещения. Теорема Гаусса для поля в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред.

Проводники в электростатическом поле. Электростатическая индукция. Напряженность поля внутри проводника. Эквипотенциальность поверхности проводника. Электростатическая защита. Заряженный проводник. Электроемкость проводника. Конденсатор. Электроемкость конденсатора. Емкость плоского конденсатора. Соединение конденсаторов в батареи. Энергия заряженного проводника. Энергия заряженного конденсатора. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии.

Постоянный электрический ток. Законы постоянного тока. Условия существования тока. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Закон Ома для однородного участка цепи. Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Сопротивление проводника. Последовательное и параллельное соединение сопротивлений. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Закон Ома для замкнутой цепи. Правила Кирхгофа для расчета разветвленных цепей. КПД источника тока. Классическая теория электропроводности. Обоснование законов Ома и Джоуля – Ленца. Затруднения классической теории электропроводности металлов.

Электрический ток в вакууме. Эмиссионные явления. Ток в газах. Несамостоятельный и самостоятельный разряд. Вольтамперная характеристика газового разряда. Виды газовых разрядов. Понятие о плазме.

Магнитное поле и его характеристики. Закон Био – Савара – Лапласа и его применение к расчету магнитного поля. Магнитное поле прямого тока.

Магнитное поле в центре кругового проводника с током. Циркуляция вектора магнитного поля. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Магнитное поле соленоида. Силовое действие магнитного поля на проводник с током. Сила Ампера. Сила взаимодействия параллельных бесконечных токов. Плоский замкнутый контур с током в магнитном поле. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для индукции машгитного поля В. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Работа по перемещению контура с током. Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). Электромагнитная индукция. Индуктивность контура. Самоиндукция. Индуктивность соленоида. Энергия магнитного поля.

Основы электричества и магнетизма

Данный раздел предполагает краткое изложение вопросов теоретического курса, которые необходимы для решения задач, приведенных в конце настоящего пособия.

1. Электростатика

В основе учения об электричестве и магнетизме лежит представление об электромагнитном поле. Полем называют особый вид материи, передающий взаимодействие материальных объектов. Электромагнитное поле – это поле, посредством которого осуществляется электромагнитное взаимодействие частиц и тел, обладающих электрическим зарядом. Электромагнитное поле состоит из двух компонентов – электрического и магнитного полей. Электрическое поле создается электрическими зарядами и передает действие электрических сил. Магнитное поле создается движущимися электрическими зарядами и передает действие магнитных сил. Электрическая и магнитная силы – две составляющие электромагнитной силы.

Одной из основных характеристик электромагнитного взаимодействия является электрический заряд, определяющий интенсивность этого взаимодействия. Заряд существует двух видов: положительный и отрицательный. В природе существует минимальный электрический заряд, называемый – элементарным и равный $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Носителем положительного элементарного заряда в веществе является протон, отрицательного – электрон. Электрический заряд любого тела образуется совокупностью элементарных зарядов, т. е. является дискретным $q = \pm\, e \cdot N$, где N – целое положительное число.

Опыт показывает, что в замкнутой изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется. Это положение называется *законом сохранения электрического заряда*.

Электрические поля, создаваемые неподвижными зарядами, называются электростатическими, а электрические силы, характеризующие взаимодействие таких зарядов, – электростатическими или кулоновскими силами.

В основе электростатики лежит экспериментально обнаруженный закон взаимодействия неподвижных точечных зарядов, установленный Кулоном в 1785 г., который называется законом Кулона.

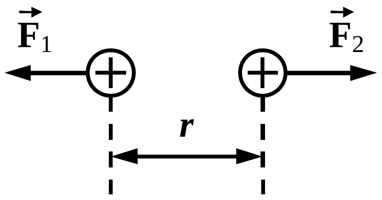


Рис. 1.1

Закон Кулона: силы $\vec{\mathbf{F}}_1$ и $\vec{\mathbf{F}}_2$, с которыми взаимодействуют два точечных электрических заряда q_1 и q_2, находящихся в вакууме, пропорциональны произведению модулей этих зарядов, обратно пропорциональны квадрату расстояния r между ними и направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды (рис. 1.1):

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \qquad (1.1)$$

где $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2 – коэффициент пропорциональности;

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл/(м^2·Н) – электрическая постоянная.

Одноименные заряды отталкиваются, заряды разных знаков притягиваются.

Закон Кулона справедлив только для точечных зарядов. Заряд называется точечным, если он сосредоточен на теле, размерами которого можно пренебречь.

Если взаимодействие неподвижных точечных зарядов осуществляется не в вакууме, а в веществе, электрические свойства которого определяются величиной ε - относительной диэлектрической проницаемостью этого вещества, то силы взаимодействия F_1 и F_2 уменьшаются в ε раз:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}. \qquad (1.2)$$

Напряженность электростатического поля. Электрическое взаимодействие зарядов осуществляется посредством электрического поля. Каждый заряд создает в окружающем пространстве электрическое поле и через него действует на другие заряды.

Электрическое поле можно экспериментально исследовать с помощью пробного заряда. Пробный заряд q_0 – это положительный точечный заряд, достаточно малый по величине. Опыт показывает, что сила $\vec{\mathbf{F}}$, с которой электрическое поле в данной точке действует на пробный заряд, прямо пропорциональна величине пробного заряда q_0, поэтому отношение силы $\vec{\mathbf{F}}$ к заряду q_0 не зависит от величины заряда q_0 в данной точке и характеризует только само поле в этой точке. Эта векторная характеристика $\vec{\mathbf{F}} / q_0$ называется напряженностью электростатического поля.

Определение. Напряженностью электростатического поля называется физическая величина, численно равная отношению силы, действующей на заряд со стороны электростатического поля, к величине этого заряда в данной точке поля:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}} \,/\, q\,. \tag{1.3}$$

Напряженность электростатического поля является силовой характеристикой электростатического поля, показывающей, с какой силой электростатическое поле действует на единичный (1 Кл) положительный заряд, помещенный в эту точку.

Следовательно, сила, действующая на произвольный заряд q со стороны поля в данной точке:

$$\vec{\mathbf{F}} = q \cdot \vec{\mathbf{E}}. \tag{1.4}$$

Напряженность электростатического поля точечного заряда. Как следует из формул (1.1) и (1.3), модуль напряженности поля точечного заряда q в точке, находящейся на расстоянии r от заряда,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}\,. \tag{1.5}$$

Из формулы (1.4) и рисунка 1.1 видно, что вектор $\vec{\mathbf{E}}$ в каждой точке поля точечного заряда q направлен радиально от заряда, если $q > 0$ (и к заряду, если $q < 0$).

Из школьного курса физики известно, что, при внесении в электрическое поле диэлектрика, происходит смещение зарядов внутри молекул диэлектрика (явление поляризации диэлектрика). В результате создается поле с напряженностью, направленной противоположно напряженности внешнего поля. Из-за этого поле внутри диэлектрика ослабевает. Физическая величина, показывающая, во сколько раз модуль напряженности электрического поля внутри диэлектрика меньше модуля напряженности поля в вакууме, называется относительной диэлектрической проницаемостью ε.

Если точечный заряд находится не в вакууме, а в веществе, то величина напряженности поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2}\,. \tag{1.6}$$

Единица напряженности электрического поля согласно выражению (1.3) – Ньютон на Кулон (Н/Кл). 1 Н/Кл – напряженность такого поля, которое на точечный заряд в 1 Кл действует с силой в 1 Н. Из последующей формулы (1.36) будет видно, что 1 Н/Кл эквивалентен единице 1 В/м (Вольт на метр), которая является основной единицей напряженности электрического поля в системе СИ.

Принцип суперпозиции. Рассмотрим систему точечных зарядов q_1, q_2, … , q_n. Поместим в некоторую точку А пробный заряд q_0. Заряд q_1, взятый в отдельности, действует на пробный заряд q_0 (рис.1.2) с силой $\vec{\mathbf{F}}_1$, заряд q_2 – с силой $\vec{\mathbf{F}}_2$ и т.д. Опыт показывает, что результирующая сила $\vec{\mathbf{F}}$, действующая на пробный заряд, равна геометрической сумме сил $\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{F}}_2$, … , $\vec{\mathbf{F}}_n$:

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_n. \tag{1.7}$$

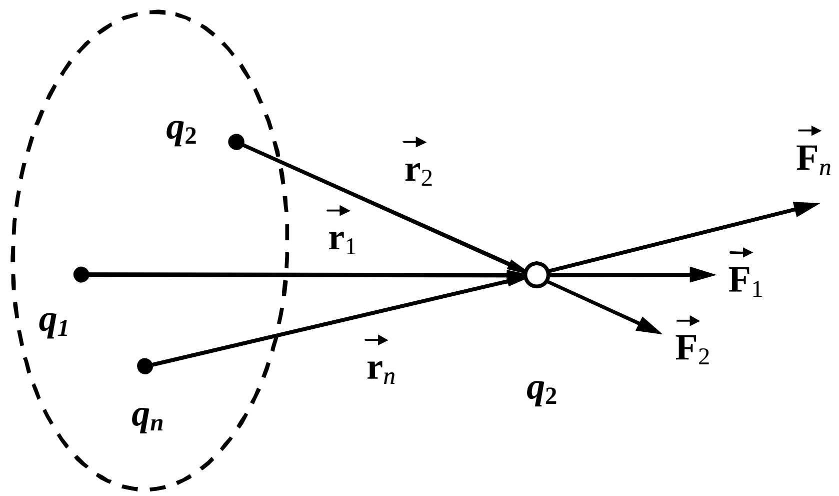


Рис.1.2

Разделив соотношение (1.7) на q_0, согласно формуле (1.3), получим выражение для результирующей напряженности в точке А:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_0} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_1}{q_0} + \frac{\vec{\mathbf{F}}_2}{q_0} + \ldots + \frac{\vec{\mathbf{F}}_n}{q_0} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{E}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i\,, \tag{1.8}$$

где $\vec{\mathbf{E}}_i$ – напряженность, создаваемая зарядом q_i в точке А.

Соотношение (1.8) выражает принцип суперпозиции (наложения) полей. Таким образом, принцип суперпозиции утверждает: напряженность поля, созданного системой зарядов, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет вычислить напряженность поля любого протяженного заряженного тела, представив его как совокупность элементарных (бесконечно малых) зарядов dq. Каждый заряд dq создает в точке А поле с напряженностью $d\vec{\mathbf{E}}$. При непрерывном распределении зарядов суммирование для определения результирующей напряженности (1.8) заменяется интегрированием. В этом случае

$$\vec{\mathbf{E}} = \int d\vec{\mathbf{E}}. \tag{1.9}$$

Чтобы выразить dq, нужно знать закон распределения полного заряда q в пространстве. Заряд, распределенный по объему, поверхности или линии, называется соответственно объемным, поверхностным, линейным. Распределение заряда по объему, поверхности, линии характеризует соответственно объемная ρ, поверхностная σ, линейная τ плотность зарядов.

Объемная плотность заряда – заряд, отнесенный к единице объема.

Если электрический заряд q равномерно распределен по объему V, то

$$\rho = \frac{q}{V}\ ,\ \ q = \rho \cdot V. \qquad (1.10)$$

Как следует из соотношения (1.10), объемная плотность заряда измеряется в Кл/м^3.

Поверхностная плотность заряда – заряд, отнесенный к единице поверхности.

Если заряд q равномерно распределен по поверхности S, то

$$\sigma = \frac{q}{S}\ ,\ q = \sigma \cdot S. \qquad (1.11)$$

Из формулы (1.11) следует, что поверхностная плотность заряда измеряется в Кл/м^2.

Линейная плотность заряда – заряд, отнесенный к единице длины.

По аналогии с выражениями (1.10) и (1.11)

$$\tau = \frac{q}{L}\ ,\ \ \ q = \tau \cdot L. \qquad (1.12)$$

Из формулы (1.12) следует, что линейная плотность заряда измеряется в Кл/м.

Если известны ρ, σ или τ как функции координат, то величина элементарного заряда dq выразится, в соответствии с (1.10), (1.11) и (1.12), следующим образом: $dq = \rho \cdot dV$, $dq = \sigma \cdot dS$, $dq = \tau \cdot dL$, где dV, dS, dL – бесконечно малые элементы объема, поверхности, линии.

Разбив заряд q на элементарные порции заряда dq и записав по формуле (1.5) напряженность $dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$, создаваемую точечным зарядом dq, интегрируют полученное выражение в соответствии с формулой (1.9).

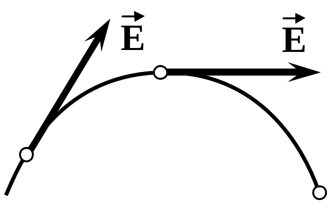


Рис.1.3

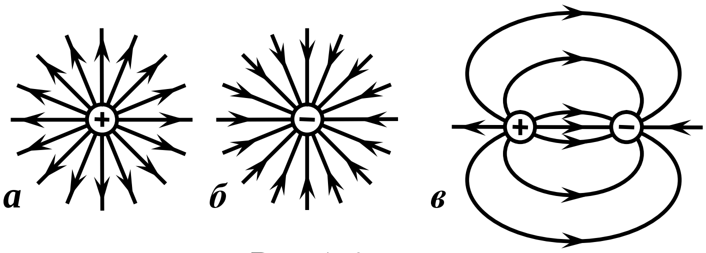


Рис.1.4

Графическое изображение электростатического поля. В наглядной форме электростатическое поле принято изображать графически с помощью линий напряженности электростатического поля.

Линия напряженности (силовая линия) – линия, проведенная в электростатическом поле так, что вектор напряженности $\vec{\mathbf{E}}$ в каждой ее точке направлен по касательной к этой линии (рис. 1.3). Силовым линиям приписывается направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{\mathbf{E}}$. Линии напряженности выходят из положительных зарядов и входят в отрицательные. На рис. 1.4 представлены линии напряженности поля:

а) положительного точечного заряда;

б) отрицательного точечного заряда;

в) двух разноименных зарядов (диполя).

С помощью линий напряженности можно охарактеризовать не только направление, но и величину поля $\vec{\mathbf{E}}$. Для этого линии проводят с определенной густотой так, чтобы число линий, пронизывающих единицу поверхности, расположенную перпендикулярно линиям, было равно модулю вектора $\vec{\mathbf{E}}$ в данной области поля.

Если силовые линии электростатического поля в каждой точке имеют одинаковое направление и проходят с одинаковой густотой, то это означает, что во всех точках вектор напряженности $\vec{\mathbf{E}}$ имеет одно и то же значение. Такие поля называются однородными.

Поток вектора напряженности электростатического поля. Число силовых линий, проходящих через некоторую поверхность, связано с характеристикой поля, называемой потоком.

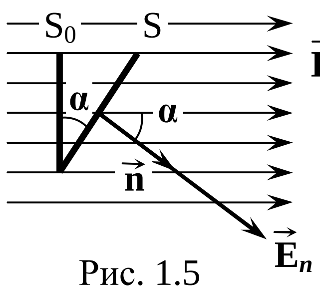


Рис. 1.5

Рассмотрим в однородном электростатическом поле плоскую площадку *S*, расположенную перпендикулярно силовым линиям вектора $\vec{\mathbf{E}}$. Поскольку силовые линии поля проводятся таким образом, что густота линий (их число на единичной площади) равна модулю вектора $\vec{\mathbf{E}}$, то число линий, пронизывающих произвольную площадку *S*, определится как $E \cdot S$. Эта величина называется потоком вектора напряженности Φ_E через площадку S : $\Phi_E = E \cdot S$.

Если поверхность *S* не перпендикулярна вектору $\vec{\mathbf{E}}$, то, как видно из рисунка 1.5, поток $\Phi_{E,S}$ через поверхность *S* равен потоку $\Phi_{E,S0}$ через поверхность S_0, которая перпендикулярна вектору $\vec{\mathbf{E}}$, т.к. число силовых линий вектора $\vec{E}$, пронизывающих площадки, одинаково.

$\Phi_{E,S} = \Phi_{E,S0} = E \cdot S_0 = E \cdot S \cdot \cos\alpha = E_n \cdot S$,

где α – угол между направлением вектора $\vec{\mathbf{E}}$ и нормалью к поверхности *S*, а $E_n = E \cdot \cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{\mathbf{E}}$ на нормаль $\vec{\mathbf{n}}$.

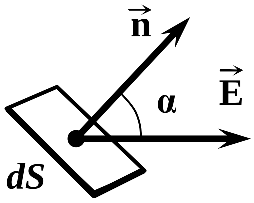


Рис. 1.6

Если поле неоднородно и поверхность не является плоской, то эту поверхность можно разбить на бесконечно малые элементы поверхности *dS* и каждый элемент считать плоским, а поле в пределах этого малого элемента однородным.

Рассмотрим малую площадку *dS*, которую пронизывают силовые линии электростатического поля (рис. 1.6). Нормаль к площадке составляет с вектором $\vec{\mathbf{E}}$ угол α. Элементарный поток вектора напряженности $d\Phi_E$ через площадку *dS* равен

$$d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS. \qquad (1.13)$$

Чтобы найти поток вектора напряженности через всю поверхность S, необходимо сложить потоки через все малые площадки dS, т. е. проинтегрировать выражение (1.13) по поверхности S:

$$\Phi_E = \int_S E_n \cdot dS. \qquad (1.14)$$

Таким образом, поток вектора напряженности (1.14) показывает, сколько силовых линий « пронизывают» поверхность S. Формула (1.14) может приниматься за определение потока вектора напряженности через поверхность S.

Если поверхность S – замкнутая (ограничивающая со всех сторон некоторый объем), знак интеграла снабжается кружком:

$$\Phi_E = \oint_S E_n \cdot dS \qquad (1.15)$$

В случае замкнутых поверхностей под нормалью к площадке dS будем понимать внешнюю нормаль.

Теорема Гаусса. Теорема Гаусса устанавливает соотношение между потоком вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность и суммарным электрическим зарядом внутри объема, ограниченного этой поверхностью.

Теорема: Поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых данной поверхностью, деленной на ε_0.

$$\oint_S E_n \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0}, \text{ или } \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (1.16)$$

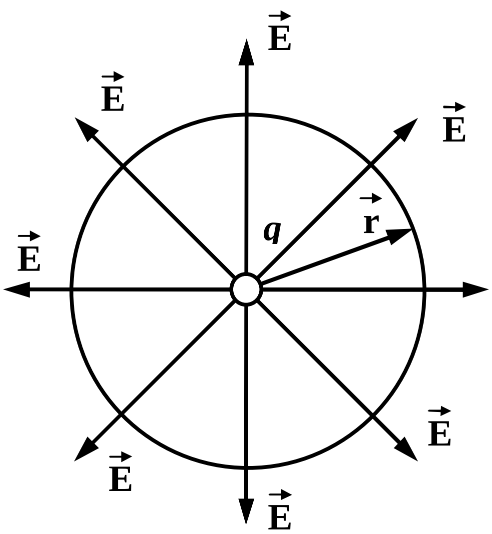


Рис. 1.7

Для доказательства теоремы Гаусса рассмотрим поле точечного заряда q. Вычислим поток вектора напряженности через замкнутую сферическую поверхность, в центре которой находится данный точечный заряд q (рис.1.7). Во всех точках сферы модуль напряженности поля точечного заряда имеет одинаковое значение и определяется выражением (1.5), а направление вектора $\vec{\mathbf{E}}$ совпадает с направлением вектора внешней нормали к поверхности $\vec{\mathbf{n}}$. Поэтому значение потока через замкнутую поверхность определится произведением E на S : $\Phi_E = E \cdot S$. Подставляя сюда значение напряженности (1.5) и площадь сферы $S = 4\pi r^2$, получаем формулу $\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$, из которой видно, что поток не зависит от размеров поверхности, а определяется зарядом, охватываемым данной поверхностью, деленной на ε_0. Легко видеть, что если форму поверхности изменить, то число силовых линий, « пронизывающих» ее, не изменится. Следовательно, этот результат справедлив не только для сферической, но и для любой замкнутой поверхности при любом произвольном расположении заряда внутри этой поверхности.

В ряде случаев теорема Гаусса позволяет вычислить напряженность электростатического поля, созданного системой симметрично расположенных распределенных зарядов. Эта задача решается просто, если вычисление потока через замкнутую поверхность сводится к произведению модуля напряженности E на площадь поверхности S, что становится возможным, когда в качестве замкнутой поверхности удается найти такую, во всех точках которой напряженность поля перпендикулярна поверхности и имеет одинаковое значение по модулю.

Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Заряд q равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью заряда s . Найдем формулу, определяющую напряженность в любой точке поля, создаваемого данной заряженной плоскостью. Линии напряженности перпендикулярны плоскости и направлены от нее в обе стороны (если заряд q положительный). В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна этой плоскости (рис. 1.8). Точка, в которой определяем напряженность поля, лежит в основании цилиндра. Полный поток сквозь цилиндр будет равен сумме потоков через боковую поверхность и сквозь основания цилиндров. Поток через боковую поверхность равен нулю, т.к. угол между направлением вектора $\vec{\mathbf{E}}$ и нормалью к боковой поверхности составляет 90^0. Поэтому полный поток равен потоку через два основания $\Phi_E = 2 \cdot E \cdot S$, где S – площадь основания цилиндра. Согласно теореме Гаусса, полный поток равен заряду q, оказавшемуся внутри цилиндра $q = \sigma \cdot S$, деленного на ε_0.

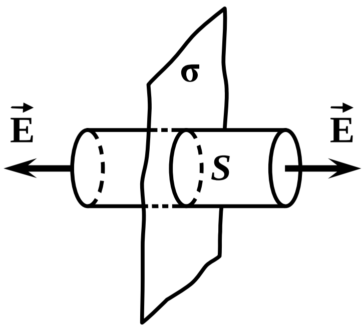


Рис. 1.8

Напряженность бесконечно заряженной плоскости находим, подставляя значение Φ_E и q в (1.16): $2 \cdot E \cdot S = \dfrac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (1.17)$$

Из формулы (1.17) видно, что бесконечно заряженная плоскость создает однородное электрическое поле и модуль напряженности одинаков во всех точках этого поля.

Поле равномерно заряженной бесконечной нити (цилиндра). Рассмотрим бесконечную равномерно заряженную нить. Пусть на единицу ее длины приходится заряд τ. Найдем формулу, определяющую напряженность в любой точке А поля, создаваемого данной заряженной нитью. Поле бесконечной нити имеет радиальный характер, т.е. в силу симметрии линии напряженности расходятся от нити равномерным веером в плоскости перпендикулярной нити, а модуль напряженности E зависит только от расстояния r до нити. В качестве вспомогательной замкнутой поверхности выберем цилиндр, радиусом r и высотой h, коаксиальный с заряженной нитью (рис.1.9). Точка A, в которой определяем напряженность поля, лежит на боковой поверхности цилиндра. Полный поток сквозь цилиндр будет равен сумме потоков через боковую поверхность и сквозь основания цилиндров. Поток через основания цилиндров равен нулю, т.к. угол между направлением вектора $\vec{\mathbf{E}}$ и нормалью к поверхности основания цилиндров составляет 90 º. Поэтому полный поток равен $E \cdot S$, где $S = 2\pi rh$ – площадь боковой поверхности цилиндра. Согласно теореме Гаусса, этот поток равен $\frac{q}{\varepsilon_0}$, где q – заряд, охватываемый данной поверхностью (находящийся между основаниями цилиндра) $q = \tau \cdot h$.

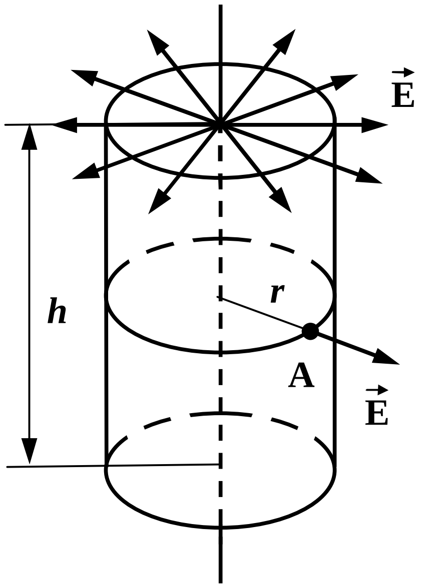


Рис. 1.9

Подставляя значение Φ_E и q в (1.16), получаем $E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\tau \cdot h}{\varepsilon_0}$, откуда напряженность поля в точке A, созданная заряженной бесконечной нитью:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \qquad (1.18)$$

Подобные рассуждения справедливы и для поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра. Формула (1.18) определяет также напряженность, созданную, бесконечным равномерно заряженным цилиндром, где τ – линейную плотность заряда, распределенного по цилиндру, а r – расстояние от оси цилиндра до точки, в которой определяется напряженность.

Поле равномерно заряженного шара. Пусть заряд равномерно распределен по шару радиусом a, с объемной плотностью заряда $\rho = \frac{q}{V}$. В силу геометрической симметрии поле равномерно заряженного шара является центрально-симметричным, т.е. линии напряженности вектора $\vec{\mathbf{E}}$ в каждой точке проходят через центр шара и модуль E зависит только от расстояния r до центра шара. Найдем формулу, определяющую напряженность в любой точке A поля, создаваемого данным заряженным шаром. В качестве вспомогательной замкнутой поверхности выберем концентрическую с шаром сферу, радиусом r (рис. 1.10). Для всех точек вне шара ($r_2 \geq a$) полный поток равен $E \cdot S$, где $S = 4\pi r^2$ – площадь сферы. Согласно теореме Гаусса этот поток равен заряду q, который охватывается замкнутой поверхностью, деленного на ε_0: $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

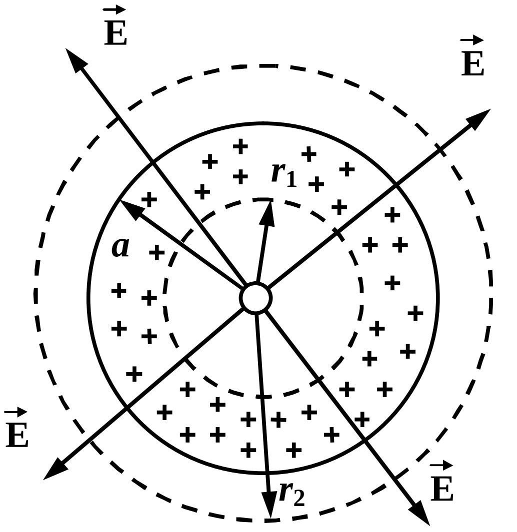


Рис. 1.10

Поэтому $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, откуда напряженность, созданная полем равномерно заряженного шара, для точек вне шара ($r \geq a$)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1.19)$$

Эта формула совпадает с выражением (1.5) для напряженности поля точечного заряда.

Для точек внутри шара ($r_1 < a$) в качестве вспомогательной замкнутой поверхности выберем концентрическую с шаром сферу, радиусом $r < a$. Сфера, радиусом $r < a$, охватывает заряд, равный $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$. Поэтому с учетом теоремы Гаусса можно записать $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Выразив объемную плотность заряда через полный заряд q и объем шара V: $\rho = \dfrac{q}{V} = \dfrac{q}{\frac{4}{3} \cdot \pi a^3}$, получим напряженность, созданную полем равномерно заряженного шара для точек внутри шара ($r < a$)

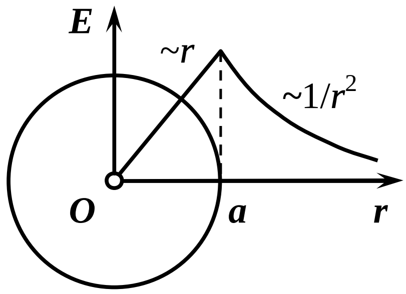


Рис. 1.11

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r. \qquad (1.20)$$

Таким образом, внутри шара напряженность поля растет линейно с расстоянием $\boldsymbol{r}$ от центра шара, вне шара убывает по закону $\dfrac{1}{r^2}$ (рис. 1.11).

Работа перемещения заряда в электрическом поле. Рассмотрим перемещение точечного заряда q_1 в электрическом поле, созданном другим точечным зарядом q_2, вдоль прямой, соединяющей заряды (рис.1.12). Элементарная работа, совершаемая полем при перемещении q_1 на бесконечно

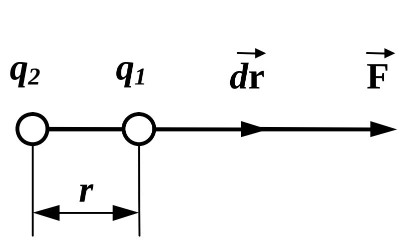


Рис. 1.12

малое расстояние dr, определится как $dA = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathbf{r}}$, а т. к. векторы $\vec{\mathbf{F}}$ и $\vec{d\mathbf{r}}$ сонаправлены, то $dA = F \cdot dr$. Сила по закону Кулона определяется выражением (1.1) $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, а работа $dA = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot dr$.

Полная работа электростатических сил при перемещении заряда q_1 из начального положения в конечное будет

$$A_{12} = \int dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_2}, \qquad (1.21)$$

где r_1 и r_2 – начальное и конечное расстояние между зарядами. Можно показать, что выражение работы (1.21), совершаемой полем, будет иметь такой же вид при перемещении заряда вдоль произвольной траектории. Из выражения (1.21) видно, что работа сил электростатического поля определяется только положениями начальной и конечной точек пути. Если конечная точка совпадает с начальной, то на таком замкнутом пути работа сил электростатического поля равна нулю. Силы, обладающие таким свойством, является потенциальными (консервативными). Следовательно, электростатические силы являются консервативными, а электростатическое поле – потенциальным.

Из механики известно, что если сила консервативна, то работа этой силы равна убыли потенциальной энергии этого тела, к которому эта сила приложена. Следовательно, работа электростатических сил при перемещении заряда q_1 из начального в конечное положения будет равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда

$$A_{12} = W_1 - W_2, \qquad (1.22)$$

где W_1 – потенциальная энергия заряда в начальном положении, а W_2 – потенциальная энергия в конечном положении.

Полную работу электростатических сил A_{12}, определяемую формулой (1.21), при перемещении заряда q_1 можно представить как

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_2} = W_1 - W_2. \qquad (1.23)$$

Из формулы (1.23) видно, что потенциальная энергия точечного заряда q_1 в поле заряда q_2 на расстоянии r от него, равна

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r}. \qquad (1.24)$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. При перемещении заряда на пути элементарная работа сил электростатического поля равна $dA = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = q\,\vec{\mathbf{E}}\,d\vec{\mathbf{l}} = qE_{\mathbf{l}}\,d\mathbf{l}$, $E_{\mathbf{l}}$ – проекция вектора $\vec{\mathbf{E}}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{\mathbf{l}}$ (рис. 1.13).

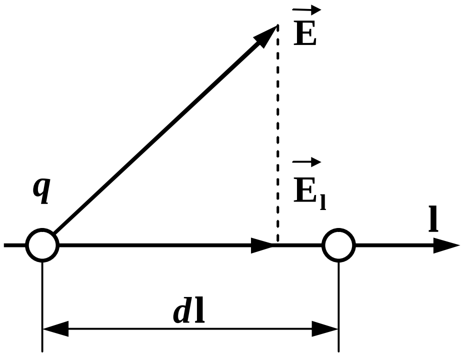


Рис. 1.13

Если перемещается единичный положительный заряд $q_0 = +1$ Кл, то элементарная работа определится: $\frac{dA}{q_0} = E_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l}$, а полная работа: $\frac{A}{q_0} = \int E_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l}$.

Поскольку работа сил поля по замкнутой траектории равна нулю, то интеграл $\oint\limits_L E_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l}$, определяющий работу при перемещении единичного положительного заряда в электростатическом поле по любому замкнутому пути (контуру) L, тоже должен равняться нулю:

$$\oint\limits_L \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \oint\limits_L E_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l} = 0, \qquad (1.25)$$

где кружок у интеграла означает, что интегрирование производится по замкнутому контуру L.

Интеграл (1.25) называется циркуляцией вектора напряженности. Таким образом, циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю.

Равенство нулю циркуляции вектора напряженности является главным свойством электростатического поля.

Потенциал электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Опыт показывает, что потенциальная энергия W пробного заряда $+q_0$, внесенного в данную точку электростатического поля прямо пропорциональна величине данного заряда q_0, поэтому отношение энергии W к заряду q_0 не зависит от q_0 и характеризует только само поле. Следовательно, величина $W / q_0 = \varphi$ может служить энергетической характеристикой электростатического поля в данной точке. Эта величина называется потенциалом электростатического поля.

Определение. Потенциалом электростатического поля называется физическая величина, численно равная отношению потенциальной энергии заряда к величине этого заряда в данной точке поля

$$\varphi = \frac{W}{q}. \qquad (1.26)$$

Потенциал является энергетической характеристикой электростатического поля, показывающей, какой потенциальной энергией обладает единичный положительный заряд (равный 1 Кл), помещенный в данную точку поля.

Численно потенциал φ_1 некоторой точки поля 1 равен работе, которую способны совершить силы электростатического поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность (где напряженность поля и потенциал следует считать равными нулю):

$$\varphi_1 = \frac{W}{q_0} = \frac{A_{1\infty}}{q_0} = \int\limits_1^{\infty} E_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l} \,. \tag{1.27}$$

Единица потенциала – вольт (В). 1 В есть потенциал точки поля, в которой заряд 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж, т.е. 1 В = 1 Дж / Кл.

Потенциал точки поля 1 В означает, что при перемещении из нее в бесконечность положительного заряда в 1 Кл силы поля совершают работу в 1 Дж.

Из выражения (1.26) следует, что потенциальная энергия заряда q_0, помещенного в точку поля с потенциалом φ, будет $W = q_0 \cdot \varphi$. Соответственно, потенциальная энергия заряда q_0, помещенного из точки поля с потенциалом φ_1 и φ_2, определится как $W_1 = q_0 \cdot \varphi_1$, $W_2 = q_0 \cdot \varphi_2$.

Работу электростатических сил при перемещении заряда q_0 из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 можно представить как убыль потенциальной энергии перемещаемого заряда (1.22).

Следовательно,

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q_0 \cdot \varphi_1 - q_0 \cdot \varphi_2 = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = q_0 \cdot U, \tag{1.28}$$

где $U = (\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов в начальной и конечной точках пути, называемая напряжением.

Таким образом, работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда, равна произведению величины заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

Формула (1.28) дает возможность определить разность потенциалов как работу по перемещению заряда в 1 Кл из одной точки поля в другую:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} \,. \tag{1.29}$$

Единица разности потенциалов (напряжения) – вольт (В).

Работу электростатических сил при перемещении точечного заряда q_1 в электрическом поле, созданном другим точечным зарядом q_2, определяемую формулой (1.21) с учетом (1.29), можно выразить как

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_2} = q_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = q_1 \cdot \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_2} \right). \tag{1.30}$$

Из формулы (1.30) следует, что потенциал электростатического поля, создаваемый точечным зарядом q на расстоянии r от него, определится выражением

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \,. \tag{1.31}$$

Потенциал поля φ системы точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в некоторой точке поля равен алгебраической сумме потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots, \varphi_n$ полей этих зарядов в этой же точке поля:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \tag{1.32}$$

где r_i – расстояние от заряда q_i до точки, в которой определяется потенциал.

Если поле создано непрерывно распределенным зарядом, то потенциал этого поля

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho \cdot dV}{r}, \tag{1.33}$$

где $d\varphi$ – потенциал, создаваемый точечным зарядом $dq = \rho \cdot dV$;
r – расстояние от точечного заряда dq до точки, в которой вычисляется потенциал.

Связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля. Электростатическое поле может быть описано либо с помощью вектора напряженности электростатического поля $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$, либо с помощью потенциала поля $\varphi = \varphi(\vec{\mathbf{r}})$. Зная одну величину, например, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$, можно определить другую, $\varphi = \varphi(\vec{\mathbf{r}})$, и наоборот.

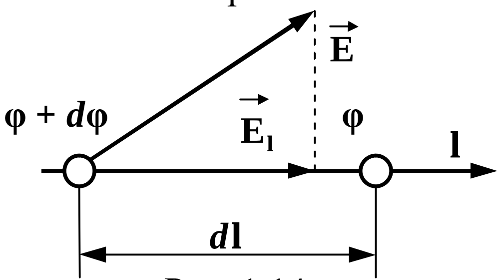


Рис. 1.14

Связь между $\vec{\mathbf{E}}$ и φ можно установить из тех соображений, что работа по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 определяется с одной стороны, как $A_{12} = q \int E_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l}$; с другой, $A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$. Приравняв правые части этих уравнений, получим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int E_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l}. \tag{1.34}$$

Формула (1.34) справедлива не только для конечных, но и элементарных перемещений $d\mathbf{l}$ (рис.1.14).

Согласно уравнению (1.34) элементарная убыль потенциала на перемещении $d\mathbf{l}$:

$$-d\varphi = E_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{l}. \tag{1.35}$$

Тогда проекция $E_{\mathbf{l}}$ на перемещение $d\mathbf{l}$:

$$E_{\mathbf{l}} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{l}}. \tag{1.36}$$

Таким образом, проекция вектора напряженности электростатического поля $E_{\mathbf{l}}$ на любое направление $\mathbf{l}$ в пространстве равна убыли потенциала на единице длины вдоль этого направления.

Электроемкость проводника. Так как потенциал во всех точках проводника одинаков, то можно просто говорить о потенциале проводника. Опыт показывает, что потенциал проводника φ прямо пропорционален заряду проводника q. Следовательно, отношение заряда к потенциалу является для данного проводника постоянной величиной, которая называется электроемкостью проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (1.37)$$

Таким образом, электроемкость проводника – физическая величина, характеризующая способность проводника накапливать электрический заряд и показывающая, какой заряд необходимо сообщить проводнику, чтобы потенциал его стал равен единице ($C = q$, при $\varphi = 1$ В).

Единица электроемкости – Фарада (Ф). 1 Ф – емкость такого проводника, потенциал которого равен 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

На практике пользуются следующими единицами: микроФарадой (1 мкФ = 10^{-6} Ф) и пикоФарадой (1 пФ = 10^{-12} Ф).

Электроемкость проводника зависит от его размеров и формы проводника, от диэлектрической проницаемости окружающей проводник среды, но не зависит от материала проводника.

Получим формулу для емкости металлического шара радиуса R. Для этого необходимо определить потенциал на поверхности шара. Воспользуемся формулой (1.34) $\varphi_1 - \varphi_2 = \int E \cdot dr$, где за потенциал φ_1 возьмем потенциал на поверхности шара φ, а за потенциал φ_2 – потенциал на бесконечности (где потенциал считается равным нулю). Тогда потенциал на поверхности шара определится $\varphi = \int\limits_R^{\infty} E \cdot dr$. Напряженность поля шара определяется формулой (1.19): $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$. Подставляя выражение (1.19) в формулу для потенциала, получим

$$\varphi = \int\limits_R^{\infty} E \cdot dr = \int\limits_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \cdot R}, \qquad (1.38)$$

где q – заряд шара, R – радиус шара, ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Подставив значение потенциала (1.38) в формулу определения электроемкости проводника (1.37), получим формулу для емкости шара:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \qquad (1.39)$$

Отметим, что из формулы (1.39) следует, что электрическая постоянная ε_0 может измеряться не только в Кл/(м^2·Н), как это вытекает из (1.1), но и в фарадах на метр (Ф/м).

Конденсаторы. Конденсатором называется устройство, состоящее из двух близко расположенных разноименно заряженных металлических проводников (обкладок), разделенных слоем диэлектрика. В зависимости от формы обкладок различают конденсаторы плоские, цилиндрические, сферические.

Основной характеристикой конденсатора является электроемкость:

$$C = \frac{q}{U}, \qquad (1.40)$$

где q – заряд на обкладках конденсатора; $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между обкладками.

Выражение (1.40) показывает, что $C = q$ при $U = 1$ В, т.е. можно сказать, что электроемкость – это величина, численно равная заряду, который надо сообщить конденсатору, чтобы разность потенциалов между обкладками равнялась единице. Емкость конденсатора определяется его размерами и формой, а также свойствами диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Определим емкость плоского конденсатора, состоящего из пластин площадью S, расположенными на расстоянии d друг от друга. Конденсатор заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε.

Напряженность электростатического поля между пластинами конденсатора $E = 2E_1$, где E_1 – напряженность электростатического поля, созданного одной пластиной, определяемое (1.17),

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}, \tag{1.41}$$

где $\sigma = \frac{q}{S}$, – поверхностная плотность заряда на пластине.

Напряжение между обкладками определится как

$$U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}. \tag{1.42}$$

Подставляя напряжение (1.42) в формулу (1.40), найдем формулу емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \tag{1.43}$$

Емкость плоского конденсатора прямо пропорциональна площади пластин, диэлектрической проницаемости и обратно пропорциональна расстоянию между обкладками.

Конденсаторы можно соединять друг с другом, образуя батареи конденсаторов. При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов:

$$C = \sum_i C_i. \tag{1.44}$$

При последовательном соединении конденсаторов обратная величина емкости батареи равна сумме обратных величин емкостей отдельных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}. \tag{1.45}$$

Энергия заряженного конденсатора. Для того чтобы зарядить конденсатор, т.е. создать систему из двух разноименно заряженных пластин, необходимо совершить работу. Мысленно процесс зарядки конденсатора можно представить как перенос малой величины заряда dq с одной обкладки на другую. При увеличении заряда обкладок на малую величину dq совершается работа, согласно формуле (1.28), $dA = dq \cdot U$. Определяя напряжение как $U = \dfrac{q}{C}$, получим выражение для работы:

$$dA = dq \cdot U = dq\frac{q}{C}. \tag{1.46}$$

Если конденсатор малыми порциями dq заряжается от 0 до конечного заряда q, то полная работа равна сумме элементарных работ, т.е. интегралу от (1.46)

$$A = \int_0^q q\frac{dq}{C} = \frac{q^2}{2C}. \tag{1.47}$$

По закону сохранения энергии, эта работа будет равна энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}. \tag{1.48}$$

Энергия электрического поля. Формула (1.48) определяет электрическую энергию W любой системы через заряды и потенциалы. Энергию W можно выразить через величины, характеризующие само электрическое поле – напряженность E. Преобразуем выражение для энергии конденсатора (1.48). Для этого подставим выражение емкости плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ и $U = E \cdot d$ в формулу (1.48):

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S \cdot (Ed)^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V, \tag{1.49}$$

где $V = S \cdot d$ – объем, занимаемый полем конденсатора.

Если поле однородно, то заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью w, равной энергии поля в единице объема, т.е.

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2}. \tag{1.50}$$

2. Постоянный электрический ток

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов. За направление тока в проводнике принимают направление движения положительных зарядов.

Количественной мерой электрического тока являются характеристики: сила тока и плотность тока.

Силой тока называется физическая величина, численно равная заряду, переносимому через поперечное сечение проводника за единицу времени:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

Электрический ток называется постоянным, если сила тока и его направление со временем не меняются.

Плотность тока – это физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока.

$$j = \frac{I}{S}. \qquad (2.2)$$

Единицы измерения в системе СИ: сила тока измеряется в амперах (А), плотность тока – в А/м^2.

Плотность тока можно выразить через концентрацию частиц носителей заряда n (число частиц в единице объема V) и скорость упорядоченного движения электрических зарядов v.

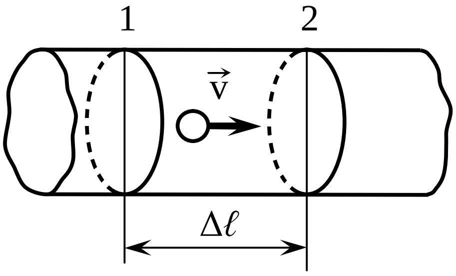


Рис. 2.1

Рассмотрим проводник, имеющий площадь поперечного сечения S (рис. 2.1). В объеме V проводника, ограниченном сечениями 1 и 2, содержится число заряженных частиц равное $N = n \cdot V$. Расстояние между сечениями 1 и 2 равно $\Delta\ell$. Если заряженные частицы движутся со средней скоростью v, то за время $\Delta t = \Delta\ell / \mathrm{v}$ все N частиц, заключенные в рассматриваемом объеме, пройдут через поперечное сечение 2. Общий заряд частиц, переносимых через данное сечение за время Δt, определится как $q = N \cdot e = n \cdot V \cdot e = n \cdot \mathrm{v} \cdot \Delta t \cdot S \cdot e$, где $V = \Delta\ell \cdot S = \mathrm{v} \cdot \Delta t \cdot S$ – объем проводника, ограниченный сечениями 1 и 2, а e – заряд носителей тока.

Плотность тока, определяемая как заряд, прошедший за единицу времени через единицу площади поперечного сечения проводника, будет равна $\frac{q}{\Delta t \cdot S} = n \cdot \mathrm{v} \cdot e$.

Таким образом, плотность тока пропорциональна концентрации частиц носителей заряда n, заряду носителей тока e и скорости упорядоченного движения электрических зарядов v:

$$j = n \cdot e \cdot \mathrm{v}. \qquad (2.3)$$

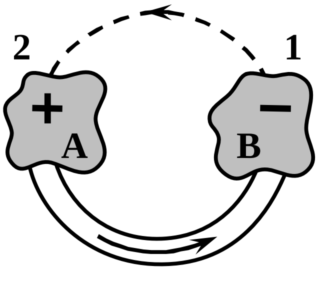


Рис. 2.2

Плотность тока является вектором, направление которого совпадает с направлением вектора скорости упорядоченного движения положительных электрических зарядов

$$\vec{\mathbf{j}} = n \cdot e \cdot \vec{\mathbf{v}}.$$

Для возникновения и существования электрического тока необходимо наличие способных перемещаться свободных носителей и электрического поля, под действием которого это движение становится упорядоченным. Рассмотрим два разноименно заряженных тела А и В (рис.2.2). Если соединить эти тела проводником, то тогда тела будут разряжаться, т.е. положительные заряды под действием электрического поля будут перемещаться в направлении, указанном стрелкой – от плюса к минусу, а отрицательные заряды – в противоположном направлении. Перемещение зарядов будет происходить до тех пор, пока потенциалы тел А и В не выравняются и ток прекратится. Поэтому для того, чтобы ток не прекращался, необходимо, чтобы на концах проводника поддерживалась постоянная разность потенциалов, и в проводнике существовало постоянное электрическое поле. Для этого необходимо, чтобы положительные заряды с тела В могли вновь возвратиться на тело А (пунктирная линия на рисунке – участок 1–2), а отрицательные заряды, – наоборот, с А на В. Такое движение возможно, если на этом участке на заряды действовали бы внешние силы, направленные противоположно электростатическим силам. Такие силы называются *сторонними* (силы неэлектростатической природы), т.е. силы, не подчиняющиеся закону Кулона, а устройство, в котором они возникают, называется *источником тока*.

Поле сторонних сил характеризуется напряженностью (аналогично напряженности электростатического поля), определяемой сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд: $E^{cm} = \dfrac{F^{cm}}{q}$.

Главной характеристикой источника тока является *электродвижущая сила (ЭДС)*. ЭДС – это физическая величина, определяемая работой сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда q_0:

$$\mathcal{E} = A / q_0. \tag{2.4}$$

Единицы измерения ЭДС в системе СИ – Дж / Кл = В (Вольт).

Если сторонние силы действуют на участке 1–2, то работа сторонних сил по перемещению заряда q_0 на этом участке определится как $A = \int_1^2 F_l^{cm} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 q_0 \cdot E_l^{cm} \cdot d\mathbf{l}$, где E_l^{cm} – проекция вектора напряженности сторонних сил на направление элементарного перемещения $d\ell$ на участке 1–2. Электродвижущую силу определим как работу при перемещении единичного положительного заряда: $\mathcal{E} = \dfrac{A}{q_0} = \int_1^2 E_{\mathbf{l}}^{cm} \cdot d\mathbf{l}$. В тех случаях, когда сторонние силы действуют вдоль всей замкнутой цепи, ЭДС определится интегралом по замкнутому контуру, т.е. циркуляцией вектора напряженности сторонних сил:

$$\mathcal{E} = \oint E_\ell^{cm} \cdot d\mathbf{l}\,.$$

Закон Ома для однородного участка цепи (участка, не содержащего источника тока). Для однородного участка цепи экспериментально установлен закон, называемый *законом Ома*: сила тока I в цепи прямо пропорциональна напряжению U, приложенному к концам проводника и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению R этого проводника:

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (2.5)$$

Единицы измерения сопротивления в системе СИ – Ом. 1 Ом – сопротивление такого проводника, в котором при напряжении в 1 В течет ток силой в 1 А.

Сопротивление проводника R зависит от длины проводника $\mathbf{l}$, площади поперечного сечения S:

$$R = \rho\,\frac{\mathbf{l}}{S}, \qquad (2.6)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление проводника, которое можно определить как сопротивление проводника единичной длины, единичного поперечного сечения. ($\rho = R$, при $\mathbf{l} = 1$, $S = 1$) Удельное сопротивление ρ зависит от материала проводника и от температуры. Размерность удельного сопротивления ρ в системе СИ – Ом·м.

Величина, обратная сопротивлению, называется электрической проводимостью проводника. Величина, обратная удельному сопротивлению, называется удельной электропроводимостью σ: $\sigma = \frac{1}{\rho}$.

Экспериментально установлено, что удельное сопротивление чистых металлов зависит линейно от температуры: $\rho_t = \rho_0\,(1 + \alpha\, t)$.

ρ_t – удельное сопротивление при температуре t, выраженной в градусах шкалы Цельсия;

ρ_0 – удельное сопротивление при температуре 0° С;

α – температурный коэффициент сопротивления данного вещества, который показывает относительное приращение сопротивления при увеличении температуры на один градус.

Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме. Закон Ома в форме (2.5), определяет связь между величинами, характеризующими весь участок проводника. Определим связь между величинами, характеризующими ток и электрическое поле в одной и той же точке проводника: между плотностью тока j и напряженностью электрического поля E.

Определим сопротивление проводника согласно выражению (2.6) как $R = \rho\,\frac{\mathbf{l}}{S}$, а силу тока I, проходящего через сечение S, как $I = j \cdot S$; напряжение U на концах цилиндра: $U = E \cdot \mathbf{l}$. Подставив эти значения в формулу (2.5), получим $j \cdot S = \dfrac{E \cdot \mathbf{l}}{\rho \cdot \dfrac{\mathbf{l}}{S}}$,

$$j = \frac{E}{\rho} = \sigma \cdot E \ . \qquad (2.7)$$

Соотношение (2.7) выражает *закон Ома в дифференциальной форме*: плотность тока в любой точке проводника пропорциональна напряженности электрического поля в этой точке.

Формулы (2.5) и (2.7) представляют собой различные формы закона Ома, определенного через разные характеристики.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца. Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов. Если сила тока в проводнике I, то за время Δt через каждое сечение проводника пройдет заряд $q = I \cdot \Delta t$. При переносе зарядов между двумя сечениями проводника, имеющими потенциалы φ_1 и φ_2, электрическое поле совершает работу $A = q\,(\varphi_1 - \varphi_2) = q \cdot U = I \cdot U \cdot \Delta t$.

Учитывая закон Ома (2.5), выражение для работы можно представить в различных формах $A = I \cdot U \cdot \Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t = I^2 \cdot R \cdot \Delta t$.

По закону сохранения энергии работа электрического тока переходит во внутреннюю энергию проводника и выделяется в виде теплоты в окружающую среду. Нагревание проводника происходит вследствие того, что электроны, движущиеся упорядоченно под действием электрического поля, взаимодействуют с ионами кристаллической решетки. Сталкиваясь, электроны отдают им свою энергию, что приводит к усилению хаотических колебаний ионов, т.е. увеличению внутренней энергии проводника.

Поэтому количество теплоты, выделяемое проводником с сопротивлением R при прохождении тока, равно работе электрического тока:

$$Q = A = I^2 \cdot R \cdot \Delta t. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) выражает *закон Джоуля – Ленца*, который состоит в том, что количество теплоты, выделяемое проводником с током, равно произведению квадрата силы тока, сопротивлению проводника и времени прохождения тока.

Учитывая закон Ома (2.5), выражение для количества теплоты можно представить в различных формах:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot \Delta t = I \cdot U \cdot \Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t. \qquad (2.9)$$

Из формулы (2.9) следует, что мощность тока $P = \frac{A}{\Delta t}$ определится:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}. \qquad (2.10)$$

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. Найдем выражение, определяющее количество теплоты, выделяемое проводником с током за единицу времени в единице объема проводника.

Определим сопротивление проводника как $R = \rho\,\dfrac{\mathbf{l}}{S}$, а силу тока I, проходящего через сечение S, как $I = j \cdot S$.

По закону Джоуля – Ленца, за время Δt в этом проводнике выделится количество теплоты Q:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot \Delta t = (j \cdot S)^2\, \rho\, \frac{\mathbf{l}}{S}\, \Delta t = j^2 \cdot \rho\, (\mathbf{l} \cdot S)\, \Delta t = j^2 \cdot \rho \cdot V \cdot \Delta t. \qquad (2.11)$$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема, называется удельной тепловой мощностью $w = \dfrac{Q}{V \cdot \Delta t}$.

Разделив количество теплоты Q (2.11) на объем V и время Δt, получим выражение, определяющее удельную тепловую мощность электрического тока:

$$w = \rho \cdot j^2 = \frac{1}{\sigma}\, j^2. \qquad (2.12)$$

Учитывая закон Ома в дифференциальной форме (2.7), выражение для удельной тепловой мощности электрического тока можно представить в различных формах:

$$w = \rho \cdot j^2 = \frac{E^2}{\rho} = j \cdot E. \qquad (2.13)$$

Так как в формулах (2.12) и (2.13) удельная тепловая мощность электрического тока определяется через плотность тока j и напряженность электрического поля E, т.е. через величины, характеризующие свойства электрического тока и электрического поля не на всем участке проводника, а в некоторой одной его точке, то закон, представленный выражениями (2.12) и (2.13), называется *законом Джоуля – Ленца в локальной, или дифференциальной форме*.

Закон Ома для неоднородного участка цепи (участка, содержащего источник тока). Если на участке цепи действуют сторонние силы, то работа всех сил (и электростатических, и сторонних) по перемещению заряда q, по закону сохранения энергии равна теплоте, выделяемой на этом участке.

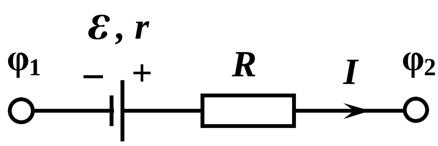


Рис. 2.3

Работа электростатических сил по перемещению заряда q определяется как $A_{эл} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$, где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи. Работа сторонних сил, согласно (2.4): $A_{ст} = q \cdot \mathcal{E}$.

Полная работа равна сумме:

$$A = A_{эл} + A_{ст} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \mathcal{E}. \qquad (2.14)$$

За время t в проводнике выделится количество теплоты, согласно формуле (2.8), $Q = I^2 \cdot R_{12} \cdot t$, где R_{12} – полное сопротивление участка 1–2.

Приравняв уравнения (2.8) и (2.14), получим:

$$I^2 \cdot R_{12} \cdot t = q\,(\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \mathcal{E}\,. \tag{2.15}$$

Учитывая, что $q = I \cdot t$, разделим левую и правую части уравнения на q, получим закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I \cdot R_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}\,. \tag{2.16}$$

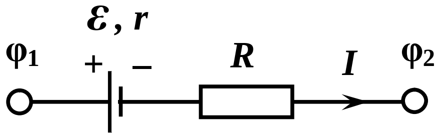


Рис. 2.4

В уравнение (2.16) ЭДС может входить с разными знаками. Знаки всех алгебраических величин в формуле (2.16) определяются по отношению к направлению мысленного обхода участка цепи от начальной точки к конечной. Для случая, представленного на рис. 2.3, в направлении обхода участка от начальной точки 1 к конечной точке 2 ЭДС источника повышает потенциал с минуса на плюс, и такая ЭДС входит в уравнение со знаком плюс. Если источник тока подключить наоборот (рис. 2.4), то в направлении обхода участка от начальной точки 1 к конечной точке 2 ЭДС понижает потенциал с плюса на минус. В этом случае ЭДС входит в уравнение со знаком минус.

Если будем рассматривать замкнутую цепь (соединим точки 1 и 2 на рис.2.3), то потенциалы точек 1 и 2 станут равными $\varphi_1 = \varphi_2$, и, соответственно, разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ будет равна нулю. В этом случае сила тока в замкнутой цепи равна отношению ЭДС источника тока к полному сопротивлению всей цепи:

$$I = \frac{e}{R + r}\,, \tag{2.17}$$

где полное сопротивление (R_{12}) складывается из R – сопротивления внешней цепи и r – внутреннего сопротивления источника тока.

Выражение (2.17) называется *законом Ома для замкнутой цепи*.

Электрические цепи. Параллельное и последовательное соединение проводников. Сопротивление внешней цепи зависит от того, каким образом соединены ее элементы.

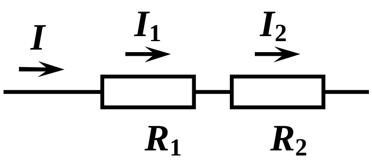


Рис. 2.5

При последовательном соединении сила тока во всех проводниках одинакова, иначе заряд накапливался бы в каких-либо точках цепи (рис.2.5): $I_1 = I_2 = I =$ const (для двух проводников).

Напряжение U на всей внешней цепи равно сумме напряжений на ее отдельных участках:

$U = U_1 + U_2$.

Тогда из закона Ома для однородного участка цепи:

$U = I \cdot R$, $U_1 = I \cdot R_1$, $U_2 = I \cdot R_2$ и, следовательно, $R = R_1 + R_2$.

Это равенство справедливо для любого числа последовательно соединенных проводников.

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n. \tag{2.18}$$

При последовательном соединении полное сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных проводников.

При параллельном соединении напряжение на всех проводниках одинаково $U_1 = U_2 = U = \text{const}$ (для двух проводников). Заряд, поступающий в единицу времени в узел, равен заряду, выходящему в единицу времени из узла: $I = I_1 + I_2$.

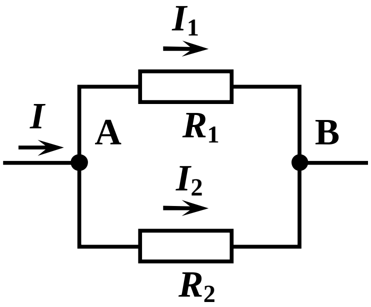


Рис. 2.6

На каждом участке из закона Ома (2.5): $I = \dfrac{U}{R}$, $I_1 = \dfrac{U}{R_1}, I_2 = \dfrac{U}{R_2}$, и, следовательно: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Это равенство справедливо для любого числа параллельно соединенных проводников:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

Величина, обратная сопротивлению всего разветвленного участка, равна сумме обратных сопротивлений каждого из параллельно соединенных проводников.

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Точка разветвленной цепи, в которой сходится больше двух проводников, называется узлом. Расчет разветвленных цепей упрощается, если воспользоваться двумя правилами Кирхгофа.

Первое относится к узлам цепи: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю: $\sum\limits_k I_k = 0$.

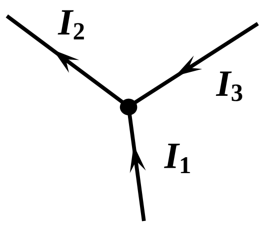


Рис. 2.7

Ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла,— отрицательным. Для узла, показанного на рисунке 2.7, уравнение, составленное по первому правилу Кирхгофа, будет иметь вид: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$.

Справедливость первого правила Кирхгофа следует из закона сохранения заряда: заряд в единицу времени, входящий в узел, должен быть равным заряду в единицу времени выходящему из узла.

Второе правило Кирхгофа справедливо для любого замкнутого контура. Алгебраическая сумма произведений силы тока на соответствующее сопротивление $I{\cdot}R$ равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (2.20)$$

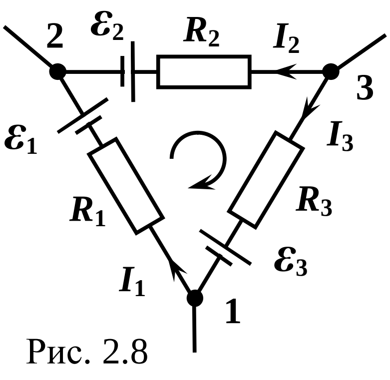


Рис. 2.8

Под алгебраической суммой понимается, что каждое слагаемое $I_i \cdot R_i$ и $\mathcal{E}_k$ уравнения (2.20) входит в него с определенным знаком – плюс или минус. Выбор знака зависит от направления обхода контура. В левой части уравнения (2.20) произведение $I_i \cdot R_i$ входит в уравнение со знаком плюс, если направление тока I_i совпадает с выбранным направлением обхода контура, в противном случае произведение $I_i \cdot R_i$ входит в уравнение со знаком минус. Знак ЭДС в правой части уравнения (2.20) будет положительным, если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, в противном случае знак ЭДС отрицательный.

Для доказательства второго правила рассмотрим случай, когда замкнутый контур состоит из трех участков. Предположим, что известны ЭДС и токи в каждой ветви замкнутого контура по величине и направлению. Зададим направление обхода контура, например, по часовой стрелке (рис.2.8). Применим к каждому участку закон Ома для неоднородного участка цепи (2.16):

$$I_1 \cdot R_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_1;$$
$$-I_2 \cdot R_2 = (\varphi_2 - \varphi_3) + \mathcal{E}_2;$$
$$I_3 \cdot R_3 = (\varphi_3 - \varphi_1) - \mathcal{E}_3.$$

Направления токов I_1 и I_3 совпадает с выбранным направлением обхода контура, а направление I_2 противоположно. Поэтому $I_1 \cdot R_1$ и $I_3 \cdot R_3$ входят в уравнения со знаком « плюс», а $I_2 \cdot R_2$ – со знаком « минус». Аналогично определяется знак ЭДС. В направлении обхода контура по часовой стрелке потенциал внутри источника повышается для ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, и понижается для $\mathcal{E}_3$.

Сложим эти уравнения и, после сокращения всех потенциалов, получим равенство $I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$.

Таким образом, уравнение (2.20) является следствием закона Ома для неоднородного участка цепи.

Мощность во внешней цепи и КПД источника тока. Пусть источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнюю цепь с сопротивлением R (рис.2.9). Во внешней цепи будет выделяться мощность, согласно формуле (2.10) $P = I^2 \cdot R$. Выразив силу тока из закона Ома для замкнутой цепи, получим зависимость P от внешнего сопротивления R:

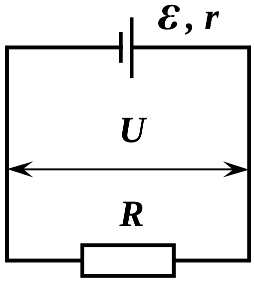


Рис. 2.9

$$P = I^2 \cdot R = \frac{e^2 \cdot R}{(R+r)^2}. \quad (2.21)$$

При некотором значении внешнего сопротивления R мощность P будет принимать максимальное значение. Это значение определится, если для (2.21) решить задачу нахождения максимума функции мощности P от сопротивления R. Для этого надо взять производную данной функции $P = P(R)$ и приравнять ее к нулю: $\frac{dP}{dR} = 0$.

$$\frac{dP}{dR} = e^2 \cdot \frac{(R+r)^2 - 2R \cdot (R+r)}{(R+r)^4} = e^2 \cdot \frac{R^2 + 2Rr + r^2 - 2R^2 - 2Rr}{(R+r)^4} = e^2 \cdot \frac{r^2 - R^2}{(R+r)^4} = 0$$

Условие $\frac{dP}{dR} = 0$ выполняется при $R = r$. Таким образом, получается, что максимальное значение мощности P, выделяемой во внешней цепи, достигается при сопротивлении внешней цепи R, равному внутреннему сопротивлению r источника тока. При этом ток в цепи равен $I = \frac{\varepsilon}{2r}$, а значение максимальной мощности

$$P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}. \quad (2.22)$$

Кроме мощности P, выделяемой на нагрузке, важной характеристикой является КПД источника тока η. Когда источник работает на внешнюю цепь, то ток протекает и внутри источника. Следовательно, некоторая часть мощности P_i тратится бесполезно на выделение тепла внутри источника $P_i = I^2 \cdot r$.

Полная мощность определится

$$P_{полн} = I^2 \cdot R + I^2 \cdot r = \mathcal{E} \cdot I. \quad (2.23)$$

КПД источника тока η определится как отношение полезной мощности, т.е. мощности P, выделяемой во внешней цепи, к полной мощности источника тока:

$$\eta = \frac{P}{P_{полн}} = \frac{I^2 \cdot R}{I \cdot \varepsilon} = \frac{U}{\varepsilon}. \quad (2.24)$$

Или с учетом $U = I \cdot R$ и $\mathcal{E} = I \cdot (R + r)$:

$$\eta = \frac{R}{R + r}. \quad (2.25)$$

3. Электромагнетизм

Магнитное поле и его характеристики. Опыт показывает, что, подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так и в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, называемое *магнитным*. Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты.

Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нем электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует *только на движущиеся* в этом поле электрические заряды.

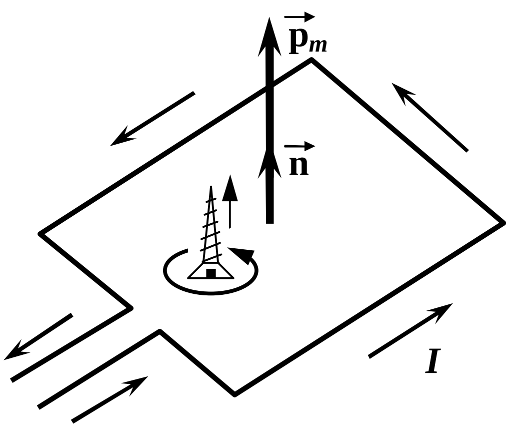


Рис. 3.1

При исследовании магнитного поля используется *замкнутый плоский контур с током (рамка с током).* Положение контура в пространстве определяется направлением нормали $\vec{\mathbf{n}}$ к контуру. Направление нормали определяется *правилом правого винта (буравчика):* за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке (рис. 3.1).

Опыты показывают, что магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая ее определенным образом. За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к свободной рамке, помещенной в это поле (рис. 3.1).

Рамкой с током можно воспользоваться также и для количественного описания магнитного поля. Так как рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, то на нее в магнитном поле действует вращающий момент сил, который определяется как произведение

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin(\widehat{\vec{\mathbf{B}}\,\vec{\mathbf{n}}}), \quad (3.1)$$

где p_m – модуль вектора магнитного момента рамки с током ($\vec{\mathbf{B}}$ – вектор магнитной индукции, B – его модуль или количественная характеристика магнитного поля). Для плоского контура с током I магнитный момент $p_m = I\,S$, а в векторном виде

$$\vec{\mathbf{p}}_m = I\,S\,\vec{\mathbf{n}}, \quad (3.2)$$

где S — площадь поверхности контура (рамки), $\vec{\mathbf{n}}$ – единичный вектор нормали к поверхности рамки. Направление $\vec{\mathbf{p}}_m$ совпадает, таким образом, с направлением положительной нормали $\vec{\mathbf{n}}$.

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты. При $\sin(\widehat{\vec{\mathbf{B}}\,\vec{\mathbf{n}}}) = 1$ ($\widehat{\vec{\mathbf{B}}\,\vec{\mathbf{n}}} = 90$ º), вращающий момент $M_{\max} = p_m B$ максимален и пропорционален магнитному моменту p_m (3.1), поэтому отношение $M_{\max} / p_m$ для всех контуров будет одним и тем же и может служить характеристикой магнитного поля, называемой магнитной индукцией:

$$B = M_{\max} / p_m. \quad (3.3)$$

Магнитная индукция в данной точке *однородного* магнитного поля численно равна максимальному вращающему моменту, действующему на рамку с магнитным моментом, равным 1 А·м^2, помещенную в данную точку поля. Единица магнитной индукции – тесла (Тл): 1 Тл – магнитная индукция такого

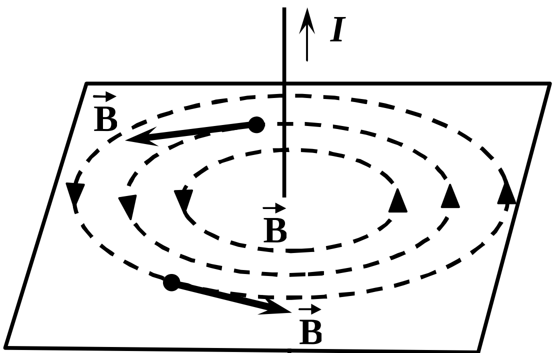


Рис. 3.2

однородного магнитного поля, которое действует с максимальным вращательным моментом 1 Н·м на единичный магнитный момент 1 $А·м^2$.

Так как магнитное поле является *силовым,* то его, по аналогии с электрическим, изображают с помощью линий магнитной индукции – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{\mathbf{B}}$. Линии магнитной индукции можно «проявить» с помощью железных опилок, намагничивающихся в исследуемом поле и ведущих себя подобно маленьким магнитным стрелкам.

Как следует из опыта, линии магнитной индукции всегда *замкнуты* и охватывают проводники с током (рис. 3.2).

На магнитные поля макроскопических токов, текущих в проводниках, влияет среда вокруг этих проводников. Согласно предположению французского физика А. Ампера (1775—1836), *внутри* любого тела существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Эти микроскопические молекулярные токи создают свое магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях макротоков. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле. Вектор магнитной индукции $\vec{\mathbf{B}}$ характеризует *результирующее* магнитное поле, создаваемое всеми *макро*- и *микротоками,* т. е. при одном и том же токе вектор $\vec{\mathbf{B}}$ в *различных* средах будет иметь *разные* значения $\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{B}}_0$, где $\vec{\mathbf{B}}_0$ – магнитная индукция в вакууме.

Кроме магнитной индукции есть вторая характеристика магнитного поля – напряженность магнитного поля $\vec{\mathbf{H}}$, которая описывает магнитное поле только макротоков. Для однородной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности следующим соотношением:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\mu\vec{\mathbf{H}}, \quad (3.4)$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн /м – магнитная постоянная, μ – безразмерная величина – магнитная проницаемость среды, показывающая, во сколько раз магнитное поле B в среде отличается от магнитной индукции в вакууме B_0 : $\mu = B / B_0 = B / \mu_0 H$. Тогда $H = B / \mu_0\mu = B_0 / \mu_0$.

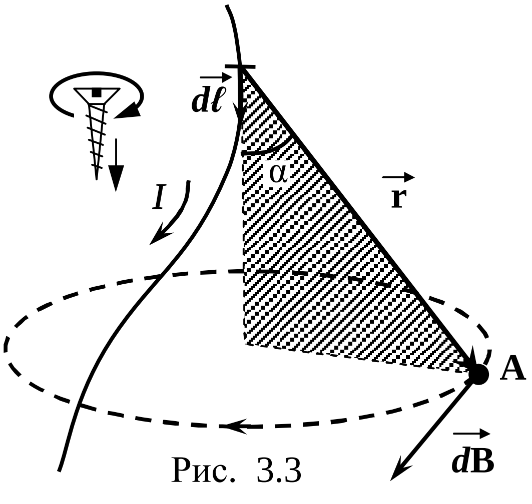


Рис. 3.3

Закон Био — Савара — Лапласа и его применение к расчету магнитного поля. Магнитное поле постоянных токов различной формы изучалось французскими учеными Ж. Био (1774—1862) и Ф. Саваром (1791—1841). Результаты этих опытов были обобщены выдающимся французским математиком и физиком П. Лапласом.

Закон Био – Савара – Лапласа для магнитного поля проводника с током *I*, говорит о том, что каждый элемент $d\vec{\mathbf{l}}$ такого проводника создает в некоторой точке А (рис. 3.3) индукцию поля $d\vec{\mathbf{B}}$:

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{r}}]}{r^3}, \qquad (3.5)$$

где $d\vec{\mathbf{l}}$ – вектор, по модулю равный длине $d\mathbf{l}$ элемента проводника и совпадающий по направлению с током, $\vec{\mathbf{r}}$– радиус-вектор, проведенный от элемента $d\mathbf{l}$ проводника в точку А поля, r — модуль радиуса-вектора $\vec{\mathbf{r}}$. Направление $d\vec{\mathbf{B}}$, определяемое векторным произведением (3.5), перпендикулярно каждому из векторов-сомножителей $d\vec{\mathbf{l}}$ и $\vec{\mathbf{r}}$, т. е. перпендикулярно плоскости (заштрихованной на рис. 3.3), в которой они лежат. Это направление может быть найдено также по правилу правого винта: если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе $d\mathbf{l}$, то направление вращения головки винта дает направление силовой линии, касательная к которой в точке А совпадает с вектором $d\vec{\mathbf{B}}$.

Модуль вектора $d\vec{\mathbf{B}}$ определяется выражением

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I \cdot d\mathbf{l} \cdot \sin\alpha}{r^2}, \qquad (3.6)$$

где α — угол между векторами $d\vec{\mathbf{l}}$ и $\vec{\mathbf{r}}$

Полная индукция от всех элементов dl в точке А будет складываться из элементарных индукций от других участков: $\vec{\mathbf{B}} = \int d\vec{\mathbf{B}}$.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: если магнитное поле создается несколькими проводниками с током, то полная индукция находится как векторная сумма магнитных индукций, создаваемых каждым током в отдельности:

$$\vec{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{\mathbf{B}}_i \qquad (3.7)$$

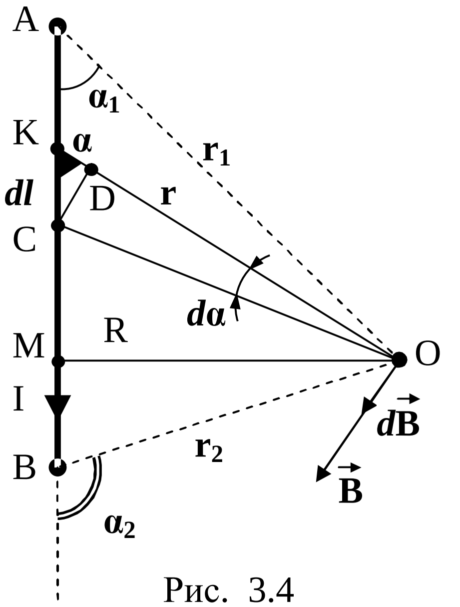


Рис. 3.4

Расчет характеристик магнитного поля ($\vec{\mathbf{B}}$ и $\vec{\mathbf{H}}$) по приведенным формулам в общем случае сложен. Однако если распределение тока имеет определенную симметрию, то применение закона Био – Савара – Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет просто рассчитать конкретные поля. Рассмотрим два примера.

Магнитное поле прямого тока. Вычислим магнитную индукцию, создаваемую участком АВ прямолинейного проводника с током I (рис. 3.4) в произвольной точке О, удалённой от проводника на расстояние R (по перпендикуляру).

Выберем на проводнике АВ элемент тока длиной $d\mathbf{l}$, который направлен по току (КС на рис. 3.4). Из точки О бесконечно малый отрезок $d\mathbf{l}$ виден под бесконечно малым углом $d\alpha$. Магнитная индукция, создаваемая этим элементом в точке О, согласно закону Био – Савара – Лапласа,

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{r}}]}{r^3}.$$

Эта индукция $d\vec{\mathbf{B}}$ в точке О направлена в соответствии с правилом буравчика перпендикулярно плоскости чертежа (« к нам»). Векторы $d\vec{\mathbf{B}}$ от всех других элементов тока имеют такое же направление, поэтому сложение векторов можно заменить сложением их модулей $B = \int dB$.

Модуль вектора $d\vec{\mathbf{B}}$ равен $dB = \dfrac{\mu\mu_0 I \cdot d\mathbf{l} \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2}$.

Найдем магнитную индукцию, создаваемую всем проводником с током в точке О:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\mathbf{l} \cdot \sin\alpha}{r^2}.$$

Для вычисления интеграла удобно перейти к одной переменной α, выразив r и $d\mathbf{l}$ через α.

Из точки С опустим перпендикуляр CD. Найдем CD из треугольника KDC CD = $d\mathbf{l}\sin\alpha$; из треугольника CDO: CD = CO sin($d\alpha$) ≈ $r\,d\alpha$ (CO ≈ KO = r при бесконечно малой величине $d\mathbf{l}$, при малых углах синус угла равен самому углу, выраженному в радианах : $\sin(d\alpha) \approx d\alpha$). Тогда CD = $d\mathbf{l}\sin\alpha = r\,d\alpha$.

Из треугольника ОМК: $r = \dfrac{R}{\sin\alpha}$. Подставляем в интеграл:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{r d\alpha}{r^2} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\sin\alpha \cdot d\alpha}{R} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \cdot d\alpha;$$

После интегрирования и подстановки пределов получаем:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2), \quad (3.8)$$

где α_1 – угол между проводником и радиус-вектором r_1, проведенным из начала проводника в искомую точку, α_2 – угол между *продолжением* проводника и радиус-вектором r_2, проведенным из конца проводника в искомую точку.

Если точка А находится на расстоянии R, которое много меньше длины проводника, то проводник можно считать бесконечно длинным. Применим формулу (3.1) к расчету поля бесконечно длинного проводника.

Так как концы проводника очень удалены от искомой точки, то $\alpha_1 \to 0°$ и $\alpha_2 \to 180°$. Тогда $B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\ 0° - \cos\ 180°) = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}(1-(-1)) = \frac{2\mu\mu_0 I}{4\pi R}$.

Таким образом, *индукция магнитного поля бесконечно длинного проводника* равна

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (3.9)$$

Магнитное поле в центре кругового проводника с током (рис. 3.5). Как следует из рисунка, все элементы $d\vec{\mathbf{l}}$ кругового проводника с током создают в центре магнитные поля $d\vec{\mathbf{B}}$ одинакового направления – вдоль нормали к плоскости витка. Поэтому сложение векторов $d\vec{\mathbf{B}}$ можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиусу-вектору ($\sin\alpha = 1$) и расстояние всех элементов проводника до центра кругового тока одинаково и равно R, то, согласно закону Био – Савара – Лапласа (3.6),

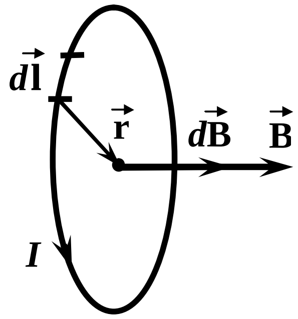


Рис. 3.5

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}d\mathbf{l}.$$

Тогда полная индукция от всех элементов кругового тока равна

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2}\int d\mathbf{l} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2}2\pi R = \mu\mu_0\frac{I}{2R}. \quad (3.10)$$

Циркуляция вектора магнитного поля. Важнейшим понятием в электромагнетизме является циркуляция вектора магнитной индукции. *Циркуляцией вектора* $\vec{\mathbf{B}}$ по заданному замкнутому контуру L называется интеграл

$$\oint_L \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \oint_L B_{\mathrm{l}} \cdot d\mathbf{l},$$

где $d\vec{\mathbf{l}}$ – вектор элементарной длины контура, направленый вдоль обхода контура, $B_l = B\cos\alpha$ — составляющая вектора $\vec{\mathbf{B}}$ в направлении касательной к контуру (с учетом выбранного направления обхода), α – угол между векторами $\vec{\mathbf{B}}$ и $d\vec{\mathbf{l}}$.

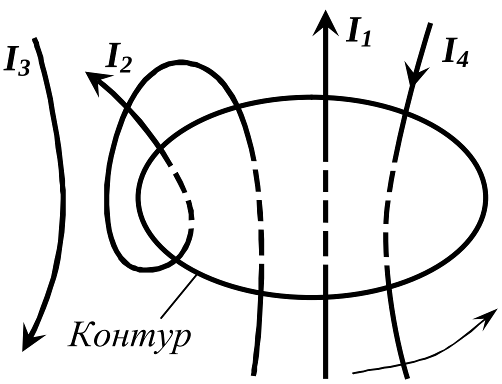


Рис. 3.6

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{\mathbf{B}}$): циркуляция вектора $\vec{\mathbf{B}}$ по произвольному замкнутому контуру L равна произведению магнитной проницаемости μ, постоянной μ_0 и алгебраической суммы токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \oint_L B_{\mathrm{l}} \cdot d\mathbf{l} = \mu\mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k, \quad (3.11)$$

где n – число проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы. Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему; ток противоположного направления считается отрицательным.

Например, для системы токов, изображенных на рис. 3.6,

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + 2I_2 - 0 \cdot I_3 - I_4.$$

Продемонстрируем справедливость теоремы о циркуляции вектора $\vec{\mathbf{B}}$ на примере магнитного поля прямого тока I, перпендикулярного плоскости чертежа и направленного к нам (рис. 3.7). Представим себе замкнутый контур в виде окружности радиуса r. В каждой точке этого контура вектор $\vec{\mathbf{B}}$ одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности (она является и линией магнитной индукции). Следовательно, циркуляция вектора В равна

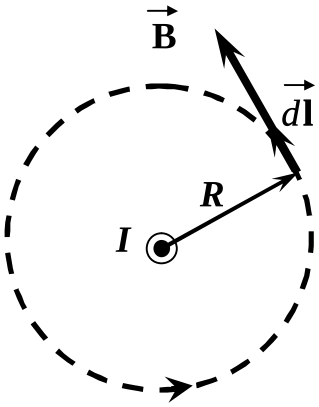


Рис. 3.7

$$\oint_L B_l\, d\mathbf{l} = \oint_L B\, d\mathbf{l} \cos 0^\circ = B \oint_L d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi R .$$

Согласно выражению (3.11), получим $B{\cdot}2\pi R = \mu\mu_0 I$ ($k = 1$, $I_1 = I$), откуда $B = \mu\mu_0 I / (2\pi R)$.

Таким образом, исходя из закона полного тока, мы получили выражение для магнитной индукции поля прямого тока, выведенное выше (3.9).

Можно доказать, что этот результат получится, если контур L имеет форму, отличную от окружности, а ток I может быть результирующим током системы проводников.

Принципиально важно, что циркуляция вектора $\vec{\mathbf{B}}$ магнитного поля не равна нулю. Такое поле называется *вихревым*.

Теорема о циркуляции вектора В имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как теорема Гаусса в электростатике, так как позволяет находить магнитную индукцию поля без применения закона Био – Савара – Лапласа.

Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{\mathbf{B}}$ к расчету магнитного поля соленоида.

Магнитное поле соленоида. Соленоид – это длинная катушка из проводника, намотанного на цилиндрический каркас. Рассчитаем, применяя теорему о циркуляции, индукцию магнитного поля внутри соленоида. Рассмотрим соленоид длиной $\mathbf{l}$ и диаметром d, имеющий N витков, по которому течет ток I (рис. 3.8). Длину соленоида считаем во много раз больше, чем диаметр его витков ($\mathbf{l} >> d$), т. е. рассматриваемый соленоид достаточно длинный. Экспериментальное изучение магнитного поля соленоида (рис. 3.8) показывает, что внутри соленоида поле является однородным, вне соленоида — неоднородным и очень слабым.

На рис. 3.8 представлены линии магнитной индукции внутри и вне соленоида. Чем соленоид длиннее, тем меньше магнитная индукция вне его. Поэтому приближенно можно считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено целиком внутри него, а полем вне соленоида можно пренебречь.

Для нахождения магнитной индукции B выберем замкнутый прямоугольный контур $ABCDA$, как показано на рис. 3.8. Циркуляция вектора $\vec{\mathbf{B}}$ по замкнутому контуру $ABCDA$, охватывающему все N витков на участке DA, согласно формуле (3.11), равна

$$\oint\limits_{ABCDA} B_{\mathbf{l}}\, d\mathbf{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i \,.$$

Во всех N витках сила тока I, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{N} I_i = NI$ и

$$\oint\limits_{ABCDA} B_{\mathbf{l}}\, d\mathbf{l} = \mu\mu_0 NI \,.$$

Интеграл по $ABCDA$ можно представить в виде четырех интегралов: по AB, BC, CD и DA. На участках AB и CD контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и $B_l = B \cdot \cos 90^\circ = 0$. На участке вне соленоида $B = 0$. На участке DA проекция вектора $\vec{\mathbf{B}}$ равна $B_{\mathbf{l}} = B \cdot \cos 0^\circ = B$ (контур совпадает с линией магнитной индукции); следовательно,

$$\int\limits_{DA} B_{\mathbf{l}} d\mathbf{l} = \int\limits_{DA} B\, d\mathbf{l} = B \int\limits_{DA} d\mathbf{l} = \mu\mu_0 NI \,.$$

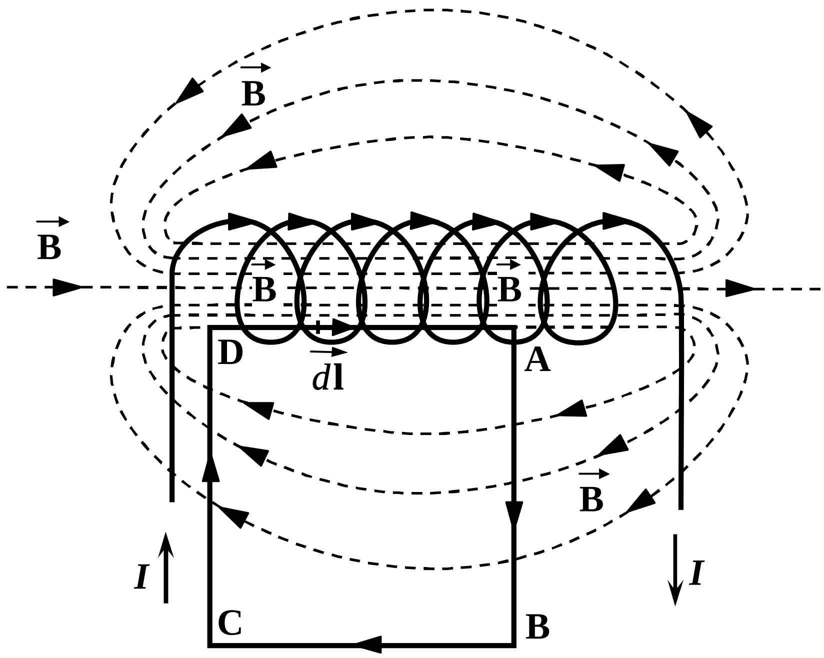


Рис. 3.8

Так как $DA = \mathbf{l}$, получим $B \cdot \mathbf{l} = \mu\mu_0 NI$, откуда приходим к выражению для *магнитной индукции поля внутри соленоида*:

$$B = \mu\mu_0 NI / \mathbf{l} = \mu\mu_0 nI, \qquad (3.12)$$

где $n = N / \mathbf{l}$ – плотность намотки, то есть число витков на единице длины соленоида.

Формула (3.12) показывает, что поле внутри длинного соленоида *однородно*.

Силовое действие магнитного поля на проводник с током. Сила Ампера. Обобщая результаты исследования действия магнитного поля на различные проводники с током, Ампер установил, что сила $d\vec{\mathbf{F}}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника $d\mathbf{l}$ с током, находящийся в магнитном поле, равна следующему векторному произведению:

Рис. 3.9

$$d\vec{\mathbf{F}} = I\,[d\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{B}}], \qquad (3.13)$$

где $d\vec{\mathbf{l}}$ – вектор, по модулю равный $d\mathbf{l}$ и совпадающий по направлению с током, $\vec{\mathbf{B}}$ – вектор магнитной индукции.

Направление вектора $d\vec{\mathbf{F}}$ может быть найдено, согласно формуле (3.13), по общим правилам векторного произведения. Этим правилам соответствует *правило левой руки:* если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор $\vec{\mathbf{B}}$, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на ток.

Модуль силы Ампера (3.13) вычисляется по формуле

$$dF = IBd\mathbf{l}\,\sin\alpha, \qquad (3.14)$$

где α – угол между векторами $d\vec{\mathbf{l}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$.

Сила взаимодействия параллельных бесконечных токов. Закон Ампера можно использовать для определения силы взаимодействия двух токов. Рассмотрим два бесконечных прямолинейных параллельных тока I_1 и I_2 (направления токов на рис. 3.10 перпендикулярны плоскости рисунка и отмечены точками, т.е. токи текут « к нам»), расстояние между которыми равно R (токи считаются бесконечно длинными, если расстояние между ними R много меньше их длины $\mathbf{l}$). Каждый проводник создает магнитное поле, которое по закону Ампера действует на другой проводник. Рассмотрим, с какой силой действует магнитное поле тока I_1 на элемент $d\mathbf{l}$ второго проводника с током I_2. Ток

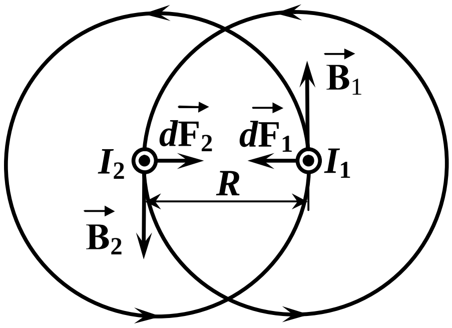


Рис. 3.10

I_1 создает вокруг себя магнитное поле, линии магнитной индукции которого представляют собой концентрические окружности. Одна из таких линий, проходщая через второй провод, изображена на рис. 3.10. Направление вектора $\vec{\mathbf{B}}_1$ определяется правилом правого винта, а его модуль по формуле (3.9) равен $B = \dfrac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}$.

Направление силы $d\vec{\mathbf{F}}_1$, с которой поле $\vec{\mathbf{B}}_1$ действует на участок $d\mathbf{l}$ второго тока, определяется по правилу левой руки и указано на рисунке. Модуль силы, согласно (3.14), с учетом того, что угол α между элементами тока I_2 и вектором $\vec{\mathbf{B}}_1$ прямой ($\sin\alpha = \sin 90° = 1$), равен $dF_1 = I_2 B_1\, d\mathbf{l}$; подставляя значения для B_1, получим $dF_1 = \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\, d\mathbf{l}$.

Рассуждая аналогично, можно показать, что сила $d\vec{\mathbf{F}}_2$, с которой магнитное поле тока I_2 действует на элемент $d\mathbf{l}$ первого проводника с током I_1 направлена в противоположную сторону и по модулю равна $dF_2 = I_1 B_2\, d\mathbf{l} = \dfrac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\, d\mathbf{l}$. Сравнение этих выражений показывает, что $dF_1 = dF_2$, т. е. два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу с силой

$$dF = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\, d\mathbf{l}. \qquad (3.15)$$

Если токи имеют противоположные направления, то, используя правило левой руки, можно показать, что между ними действует сила отталкивания, определяемая той же формулой (3.15).

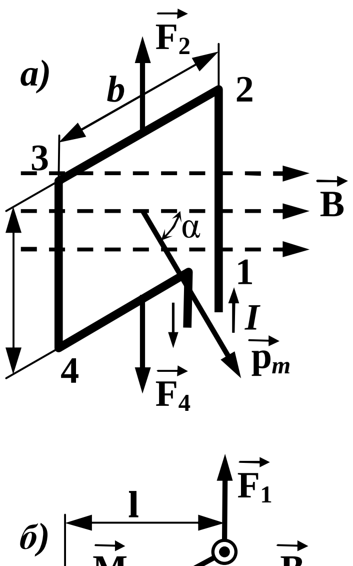


Рис. 3.11

Плоский замкнутый контур с током в магнитном поле. Большой интерес представляет действие магнитного поля на рамку с током, так как на этом явлении основаны все современные электрические двигатели, а также электроизмерительные приборы магнитоэлектрической и электродинамической систем.

Рассмотрим прямоугольную рамку с током, две стороны которой располагаются вертикально в магнитном поле, а индукция магнитного поля направлена горизонтально.

Объясняется поворот рамки в магнитном поле тем, что на ее противоположные стороны 1–2 и 3–4 действуют равные по модулю силы Ампера $\vec{\mathbf{F}}_1$ и $\vec{\mathbf{F}}_3$ (рис. 3.11, б), создающие механические моменты $\vec{\mathbf{M}}_1$ и $\vec{\mathbf{M}}_3$ (силы $\vec{\mathbf{F}}_2$ и $\vec{\mathbf{F}}_4$ можно не учитывать, так как они численно равны и направлены вдоль вертикальной оси рамки в противоположные стороны, поэтому они полностью уравновешивают друг друга, (рис. 3.11, а). Суммарный вращающий момент равен $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_1 + \vec{\mathbf{M}}_3$, причем $M_1 = M_3 = F_1 \cdot \mathbf{l}/2$. Тогда $M = 2 \cdot M_1 = F_1 \cdot \mathbf{l}$, где $\mathbf{l} = b \cdot \sin\alpha$.

Учитывая, что сила Ампера F_1 равна $F_1 = I \cdot a \cdot B \cdot \sin 90^\circ$, результирующий момент равен $M = I \cdot a \cdot b \cdot B \cdot \sin\alpha = I \cdot S \cdot B \cdot \sin\alpha$, где $S = a \cdot b$ – площадь рамки, $I \cdot S$ – числовое значение $\vec{\mathbf{p}}_m$ вектора магнитного момента рамки с током, α – угол между векторами $\vec{\mathbf{p}}_m$ и $\vec{\mathbf{B}}$.

Поэтому

$$M = p_m B \sin\alpha. \tag{3.16}$$

Таким образом, вращательный момент M пропорционален магнитному моменту p_m, магнитной индукции B и синусу угла между ними.

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Поскольку электрический ток – это упорядоченное движение зарядов, то сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, фактически действует на движущиеся заряды. Найдем выражение для силы, действующей на отдельный заряд, движущийся в магнитном поле. По закону Ампера, на элемент $d\mathbf{l}$ проводника с током I, находящийся в магнитном поле, действует сила

$$d\vec{\mathbf{F}} = I\,[d\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{B}}] = [I\, d\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{B}}].$$

Если ток в проводнике обусловлен движением частиц, заряд которых равен q, то

$$I\, d\vec{\mathbf{l}} = \frac{dQ}{dt}\, d\vec{\mathbf{l}} = \frac{d\vec{\mathbf{l}}}{dt}\, d(qN) = q\vec{\mathbf{v}}dN\ ,$$

где dN – число частиц в объеме проводника длиной $d\mathbf{l}$, $\vec{\mathbf{v}}$ – скорость их упорядоченного движения. Поэтому $d\vec{\mathbf{F}} = q dN\, [\vec{\mathbf{v}}\ \vec{\mathbf{B}}]$.

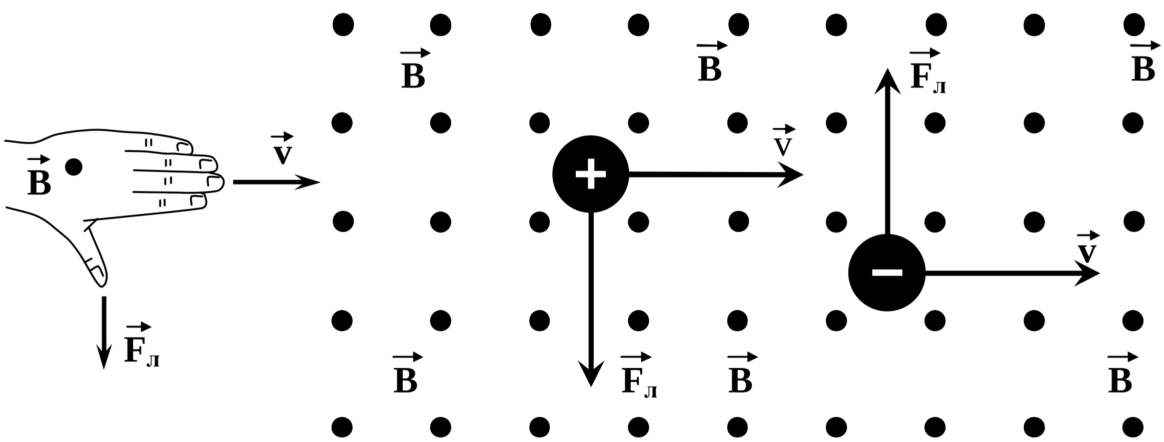


Рис. 3.12

Поделив обе части равенства на число частиц dN, получим *силу* $\vec{\mathbf{F}}_Л$, *действу-*

ющую на одну заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле. Эту силу называют *силой Лоренца*:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{Л}} = q[\vec{\mathbf{v}}\,\vec{\mathbf{B}}]. \quad (3.17)$$

Направление силы Лоренца определяется с помощью правила левой руки: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор $\vec{\mathbf{B}}$, а четыре вытянутых пальца направить вдоль вектора $\vec{\mathbf{v}}$ (для $q > 0$ направления I и $\vec{\mathbf{v}}$ совпадают, для $q < 0$ — противоположны), то отогнутый на 90 ° большой палец покажет направление силы, действующей на *положительный заряд*. На рис. 3.12 показаны направления сил, с которыми магнитное поле действует на движущиеся заряженные частицы (точки означают векторы $\vec{\mathbf{B}}$, которые направлены перпендикулярно рисунку к нам). Модуль силы Лоренца (3.17) равен

$$F = q\text{v}B\sin\alpha, \quad (3.18)$$

где α – угол между $\vec{\mathbf{v}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$.

Заметим, что магнитное поле *не действует на покоящийся электрический заряд* (при $\text{v} = 0$, $F = 0$). В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. *Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды*.

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она не совершает работы и не изменяет кинетической энергии частицы. Следовательно, скорость частицы не изменяется по величине, но изменяется по направлению.

Движение заряженных частиц в магнитном поле. Выражение для силы Лоренца (3.17) позволяет найти ряд закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле.

Для вывода общих закономерностей будем считать, что магнитное поле *однородно*. Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью $\vec{\mathbf{v}}$ вдоль линий магнитной индукции, то угол α между векторами $\vec{\mathbf{v}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ равен 0 или π. Тогда по формуле (3.18) сила Лоренца равна нулю ($\sin 0^\circ = 0$), т. е. магнитное поле на частицу не действует и она движется равномерно и прямолинейно.

Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью $\vec{\mathbf{v}}$ перпендикулярной вектору $\vec{\mathbf{B}}$, то сила Лоренца $\vec{\mathbf{F}}_{\text{Л}} = q\,[\vec{\mathbf{v}}\,\vec{\mathbf{B}}]$ постоянна по модулю и перпендикулярна к траектории частицы. Согласно второму закону Ньютона $ma = q\text{v}B$, эта сила создает ускорение $a = q\text{v}B\,/\,m$, которое является центростремительным $a = \text{v}^2/\,r$ (сила $\text{F} = q\text{v}B$ постоянна и перпендикулярна скорости v). Из равенства $q\text{v}B\,/\,m = \text{v}^2/\,r$ следует, что частица будет двигаться по окружности, радиус r которой определяется по формуле

$$r = \frac{m}{q}\frac{\text{v}}{B}. \quad (3.19)$$

Зная радиус вращения r, можно найти *период вращения частицы*, т. е. время T, за которое она совершает один полный оборот, $T = 2\pi r/\text{v}$.

Подставив сюда выражение (3.19), получим

$$T = \frac{2\pi}{B}\frac{m}{q}, \quad (3.20)$$

т. е. период вращения частицы в однородном магнитном поле определяется только величиной, обратной удельному заряду *(q/m)* частицы, и магнитной индукцией поля, но не зависит от ее скорости (при $\text{v} \ll c$).

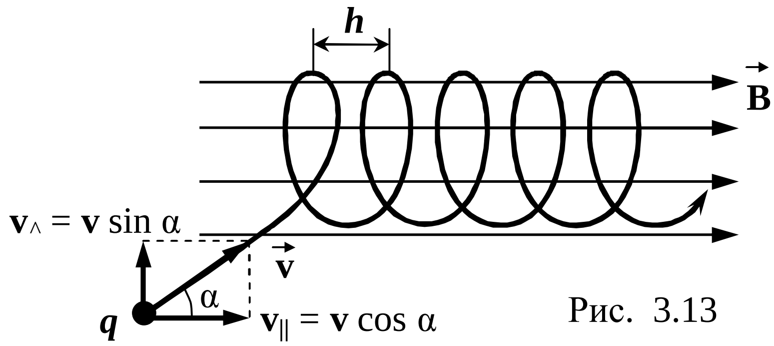


Рис. 3.13

Если скорость $\vec{\mathbf{v}}$ заряженной частицы направлена под углом α к вектору $\vec{\mathbf{B}}$ (рис. 3.13), то ее движение можно представить в виде суперпозиции двух движений: 1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью $\text{v}_{\parallel} = \text{v}\cdot\cos\alpha$; 2) равномерного вращения со скоростью $\text{v}_{\perp} = \text{v}\cdot\sin\alpha$ по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Радиус окружности определяется формулой (3.19), в которой надо заменить v на $\text{v}_{\perp} = \text{v}\cdot\sin\alpha$. В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 3.13). Шаг винтовой линии (рис. 3.13) равен

$$h = \text{v}_{\parallel}T = \text{v}T\cos\alpha.$$

Заменив T в последнем выражении по формуле (3.20), получим

$$h = 2\pi m\text{v}\cos\alpha / (Bq). \quad (3.21)$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы.

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля B. Магнитное поле принято графически изображать линиями индукции, в каждой точке которых касательный вектор совпадает с вектором магнитной индукции $\vec{\mathbf{B}}$. При этом магнитное поле уподобляется течению некоторой жидкости, где вектор индукции $\vec{\mathbf{B}}$ соответствует вектору скорости движения жидкости $\vec{\mathbf{v}}$, а линии индукции представляют собой траектории движения частиц. Таким образом, мы проводим аналогию между

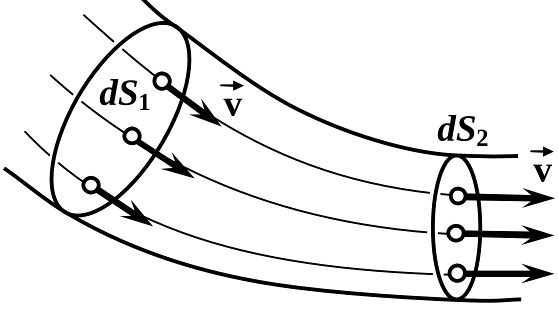


Рис. 3.14

магнитным полем $\vec{\mathbf{B}}$ и полем скоростей $\vec{\mathbf{v}}$.

Рассмотрим эту аналогию более подробно. В гидродинамике потоком жидкости $d\Pi$ через небольшую площадку dS называют массу жидкости M, которая протекает через эту площадку за единицу времени при условии, что она расположена перпендикулярно движению жидкости. Если за некоторое время dt через площадку протекает жидкость массой dM, то $d\Pi = dM/dt$. Считая, что масса одной частицы жидкости равна m_0, можно переписать эту формулу как $d\Pi = m_0 dN/dt$, где dN – количество частиц. Иными словами, поток *пропорционален количеству частиц*, проходящих через площадку за единицу времени.

Далее, считая, что количество частиц в единице объёма равно n, получим $d\Pi = m_0 n dV/dt$, где dV – объём жидкости, протекающей через сечение dS за время dt. Полагая, что площадка dS достаточно мала, чтобы скорость v частиц жидкости в её пределах была одинакова, получим, что $dV = \mathrm{v}dtdS$. Тогда $d\Pi = m_0 n\mathrm{v}dS$, и мы приходим к выводу, что поток жидкости через площадку *пропорционален её скорости*. Заметим, что произведение $m_0 n$ равно плотности жидкости ρ. Поэтому формулу можно переписать ещё в одном виде: $d\Pi = \rho\mathrm{v}dS$.

Поскольку линиями поля скоростей мы считаем траектории частиц, то можно сказать, что линии поля расположены гуще в тех местах, где скорость больше, и наоборот.

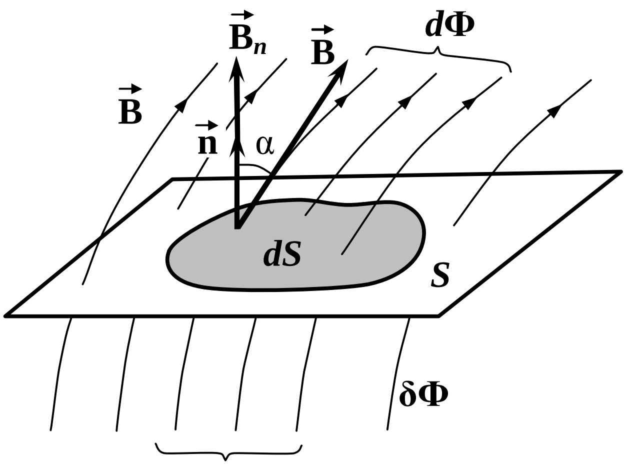


Рис. 3.15

Будем считать, что в приведённой аналогии между гидродинамикой и магнитным полем вектор магнитной индукции $\vec{\mathbf{B}}$ аналогичен вектору $\rho\vec{\mathbf{v}}$. Тогда формулу для потока перепишем в виде: $d\Pi = \rho\mathrm{v}dS \rightarrow d\Phi = B\,dS$, где символом Φ будем обозначать магнитный поток.

Необходимо отметить, что магнитное поле не является потоком движущихся частиц, поэтому понятие линии поля для него достаточно условно. Будем считать, что линии поля всегда касательны вектору индукции, а их густота пропорциональна магнитной индукции в данной точке, так что каждая линия поля представляет собой некоторый элементарный поток магнитной индукции δΦ, а поток через поверхность пропорционален числу линий индукции, пересекающих эту поверхность (рис. 3.15).

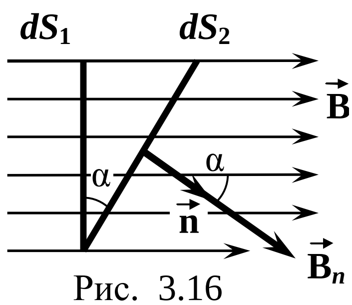


Рис. 3.16

Ранее мы упоминали, что соотношения для потока жидкости справедливы только в том случае, если рассматриваемая площадка перпендикулярна движению жидкости. Рассмотрим это условие более подробно на примере магнитного поля. Предположим, что один и тот же поток проходит через две поверхности, одна из которых перпендикулярна полю, а вторая расположена к нему под некоторым углом α (рис. 3.16). Потоки через обе площадки равны: $d\Phi_1 = d\Phi_2$. Однако $BdS_1 < BdS_2$, поскольку $S_1 < S_2$. Значит, соотношение для потока $d\Phi = BdS$ справедливо только для площадок, перпендикулярных потоку. Заметим, что для площадок dS_1 и dS_2 выполняется соотношение $dS_1 = dS_2 \cos\alpha$. Поэтому формула $d\Phi = BdS\cos\alpha$ будет справедлива для любой площадки, независимо от того, как она расположена по отношению к потоку. Таким образом, можно записать

$$d\Phi = B_n dS = BdS\cos\alpha, \quad (3.22)$$

где α – угол между нормалью $\vec{\mathbf{n}}$ к площадке dS и вектором $\vec{\mathbf{B}}$, $B_n = B\cos\alpha$ – проекция вектора магнитной индукции на нормаль $\vec{\mathbf{n}}$ к площадке (рис. 3.16).

Единица измерения магнитного потока – 1 Вб (вебер). 1 Вб – это магнитный поток, проходящий через плоскую поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл. 1 Вб = 1 Тл·м^2.

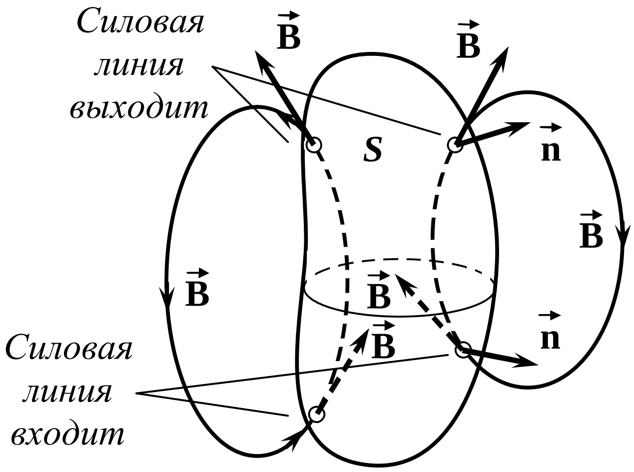


Рис. 3.17

Если поверхность S произвольна, разбиваем её на элементарные плоские площадки dS и находим полный поток по формуле

$$\Phi_B = \int_S B_n dS\,. \quad (3.23)$$

Если в магнитное поле поместить замкнутую поверхность S (рис. 3.17), то, как видно из рисунка, число входящих линий равно числу выходящих, поэтому полный поток сквозь замкнутую поверхность равен нулю. В этом заключается *теорема Гаусса для поля* $\vec{\mathbf{B}}$: поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0.$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов.

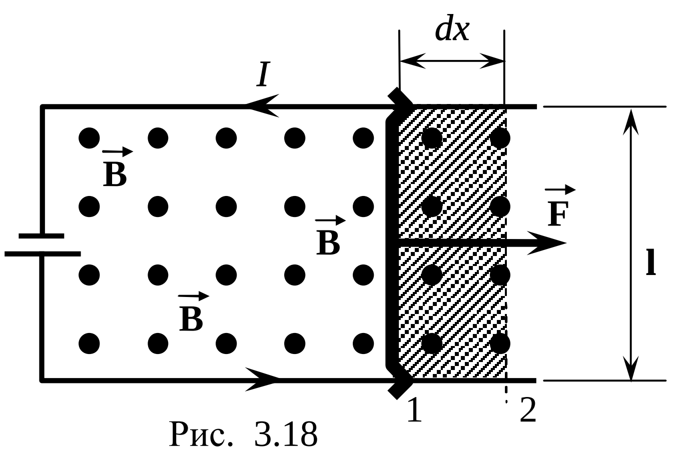


Рис. 3.18

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Проводник длиной $\mathbf{l}$ (он может свободно перемещаться) с током I находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном проводнику и скорости его перемещения (рис. 3.18). Сила Ампера $F = IB\mathbf{l}$. Пусть под ее действием проводник переместился на dx из положения 1 в 2. Работа, совершаемая магнитным полем, равна $dA = F \cdot dx = IB\,\mathbf{l}\cdot dx = IB \cdot dS = I \cdot d\Phi$ (учтено, что $dS = \mathbf{l}\cdot dx$ – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле; $B\cdot dS = d\Phi$ – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь).

При перемещении на произвольное расстояние x, проводник пересечет магнитный поток Ф, при этом совершаемая работа будет равна сумме элементарных работ dA, произведенных при перемещении на dx:

$$A = \int dA = \int_0^{\Phi} I d\Phi = I\Phi. \quad (3.24)$$

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, *пересеченный движущимся проводником*.

Работа по перемещению контура с током. Выведем теперь выражение для работы перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле. Для упрощения вычислений рассмотрим прямоугольный контур с током 12341, плоскость которого перпендикулярна к линиям вектора магнитной индукции $\vec{\mathbf{B}}$ (рис. 3.19).

Линии индукции направлены перпендикулярно чертежу и за плоскость чертежа (крестики), ток направлен по часовой стрелке.

Переместим этот контур параллельно самому себе в новое положение 1′2′3′4′1′. Магнитное поле в общем случае может быть неоднородным. В новом положении с контуром будет сцеплен магнитный поток Φ_2. Проведем пунктирные линии 32′ и 41′, вдоль которых двигались стороны контура. Эти линии выделяют площадку 32′1′4, расположенную между старым и новым положениями контура, и пронизываемую некоторым магнитным потоком Ф′. Полная работа А по перемещению контура в магнитном поле равна алгебраической сумме работ, совершенных магнитным полем по перемещению каждой из четырех сторон:

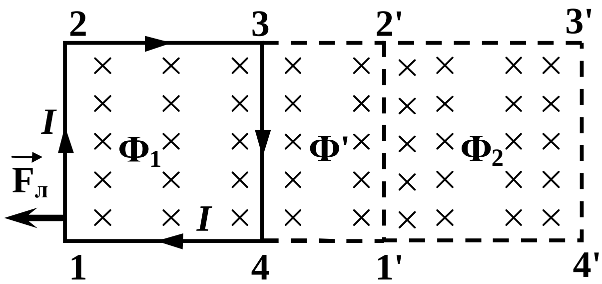


Рис. 3.19

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}. \quad (3.25)$$

Величины $A_{23} = A_{41} = 0$, так как соответствующие стороны при перемещении очерчивают нулевую площадь и не пересекают магнитного потока. Сторона 34 пересекает поток $\Phi_2 + \Phi'$, и

$$A_{34} = I\,(\Phi_2 + \Phi'). \quad (3.26)$$

Провод 12 пересекает поток $\Phi_1 + \Phi'$, но движется против сил действия магнитного поля (сила Ампера $\vec{\mathbf{F}}_A$ направлена влево против движения провода). Это означает, что работа отрицательна:

$$A_{12} = -I\,(\Phi_1 + \Phi'). \quad (3.27)$$

Из выражений (3.24) – (3.27) окончательно находим

$$A = I\,(\Phi_2 + \Phi') - I\,(\Phi_1 + \Phi') = I\,\Phi_2 + I\,\Phi' - I\,\Phi_1 - I\,\Phi' = I\,(\Phi_2 - \Phi_1) = I\,\Delta\Phi. \quad (3.28)$$

Величина $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$ представляет собой изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на *изменение магнитного потока, сцепленного с контуром*. Это соотношение, выведенное нами для простейшего случая, остается справедливым для контура любой формы в произвольном магнитном поле.

Аналогично можно доказать, что *при повороте рамки с током в магнитном поле работа* определяется той же формулой, где $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$ – изменение магнитного потока, вызванное поворотом контура в магнитном поле.

Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). Поскольку электрические токи неразрывно связаны с магнитным полем, возникающим вокруг них, можно предположить существование обратного явления возникновения электрического тока за счет магнитного поля. Это явление, называемое *электромагнитной индукцией*, было обнаружено в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем.

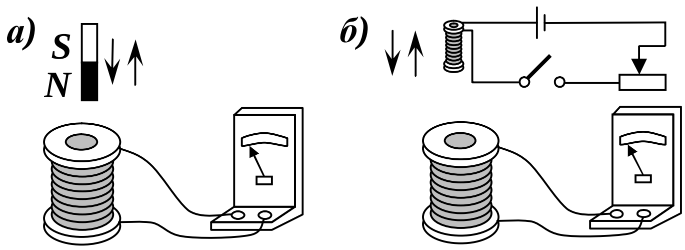


Рис. 3.20

Рассмотрим классические опыты Фарадея, с помощью которых было обнаружено явление электромагнитной индукции.

Опыт I (рис. 3.20, а). Если в замкнутую на гальванометр катушку вдвигать или выдвигать постоянный магнит, то в моменты его вдвигания или выдвигания наблюдается отклонение стрелки гальванометра (возникает индукционный ток); направления отклонения стрелки при вдвигании и выдвигании магнита противоположны. Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Для получения индукционного тока магнит можно оставлять неподвижным, тогда нужно относительно магнита передвигать катушку.

Опыт II. Концы одной из катушек, вставленных одна в другую, присоединяются к гальванометру, а через другую катушку пропускается ток. Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его увеличения или уменьшения или при перемещении катушек относительно друг друга, (рис. 3.20, б). Направления отклонений стрелки гальванометра также противоположны при включении и выключении тока, его увеличении и уменьшении, сближении и удалении катушек.

Выводы

1. Индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции.

2. Сила индукционного тока совершенно не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь *скоростью* его изменения: $I_i \sim \dfrac{d\Phi}{dt}$.

3. Индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им собственное магнитное поле препятствует изменению внешнего магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток (*правило Ленца*).

Электромагнитная индукция – явление, заключающееся в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, пронизывающего этот контур, возникает электрический ток, получивший название *индукционного*.

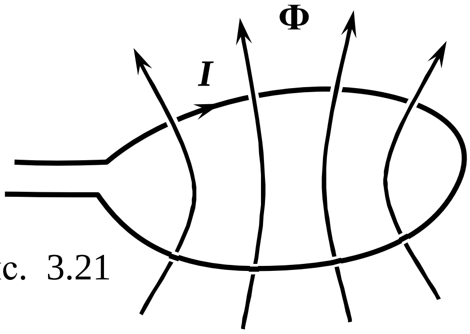


Рис. 3.21

Существование индукционного тока в контуре свидетельствует о наличии электродвижущей силы (ЭДС индукции), которая определяется формулой, полученной Фарадеем из опытов:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.29)$$

Согласно этой формуле, ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока со знаком «минус». Знак «минус» в формуле (3.29) – это математическое выражение правила Ленца: магнитное поле индукционного тока направлено так, чтобы препятствовать изменению магнитного потока.

Индуктивность контура. Самоиндукция. Магнитная индукция B поля, создаваемого током, по *закону* Био – Савара –Лапласа, пропорциональна этому току I: $B \sim I$. Ток, протекающий по контуру, создает магнитный поток Ф, пронизывающий площадь контура (рис. 3.21). Этот поток пропорционален току в контуре: $\Phi \sim B \sim I$. Введем коэффициент пропорциональности L, тогда можно записать

$$\Phi = LI, \quad (3.30)$$

где коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью контура*. Из формулы (3.30) следует, что индуктивность контура – это такой магнитный поток, который пронизывет контур при протекании по нему тока в 1 А.

Индуктивность контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится.

Единица измерения индуктивности – Гн (генри).

1 Гн (генри) – индуктивность такого контура, магнитный поток которого при токе в 1 А равен 1 Вб: 1 Гн = 1 Вб/А = 1 В·с/А.

Для примера рассмотрим индуктивность соленоида.

Индуктивность соленоида. Если по соленоиду пропустим ток, то в одном витке возникает магнитный поток $\Phi = BS$. Тогда поток, пронизывающий все витки соленоида $\Psi = N\Phi$, называется *потокосцеплением*.

Учитывая, что магнитная индукция внутри длинного соленоида ($d \ll \mathbf{l}$) равна $B = \mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 \frac{NI}{\mathbf{l}}$, можно записать

$$\Psi = NBS = \mu\mu_0 \frac{N^2 I}{\mathbf{l}} S,$$

где N – число витков соленоида, $\mathbf{l}$ – его длина, S – площадь, μ – магнитная проницаемость сердечника, μ_0 – магнитная постоянная.

Индуктивность соленоида будет равна $L = \Psi/I$, то есть

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 I}{\mathbf{l}} = \mu\mu_0 n^2 V, \tag{3.31}$$

где $V = S\mathbf{l}$ – объём соленоида, $n = \frac{N}{\mathbf{l}}$.

Самоиндукция. Если ток изменяется, то изменяется и созданный им магнитный поток Ф. В результате изменения Ф по закону электромагнитной индукции возникает ЭДС

$$e_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Поскольку ЭДС индукции в контуре вызвана изменением тока в самом этом контуре, то её называют ЭДС самоиндукции e_S.

При неизменной индуктивности контура (L = const) получаем

$$e_S = -L\frac{dI}{dt},$$

где знак минус, обусловленный *правилом Ленца*, показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к *замедлению изменения* тока в нем. Так, например, если ток возрастает ($\frac{dI}{dt} > 0$), то $e_S < 0$, т. е. ЭДС самоиндукции стремится уменьшить возрастающий ток. Таким образом, самоиндукция –

это явление возникновения ЭДС индукции e_S в контуре, по котрому протекает переменный ток ($\frac{dI}{dt} \neq 0$).

Энергия магнитного поля. Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем, причем магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. Естественно предположить, что энергия магнитного поля равна работе, которая затрачивается на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью L, по которому течет ток I. С данным контуром сцеплен магнитный поток (3.30) $\Phi = LI$, причем при изменении тока на dI магнитный поток изменяется на $d\Phi = LdI$. Однако для изменения магнитного потока на величину $d\Phi$ необходимо совершить работу $dA = I\ d\Phi = LI\,dI$. Тогда полная работа по созданию магнитного потока Ф будет равна

$$A = \int dA = \int_0^I L\,I\,dI = LI^2/2.$$

Следовательно, *энергия магнитного поля*, связанного с контуром,

$$W = LI^2/2. \qquad (3.32)$$

Энергию магнитного поля можно представить как функцию величин, характеризующих это поле в окружающем пространстве. Для этого рассмотрим частный случай — однородное магнитное поле внутри длинного соленоида. Подставив в формулу (3.32) выражение (3.31), получим $W = \mu\mu_0 n^2 V I^2/2$.

Из формулы $I = B/\mu\mu_0 n$ (3.12) и формулы $B = \mu\mu_0 H$ (3.4), следует

$$W = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}V = \frac{BH}{2}\ V = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}V, \qquad (3.33)$$

где $S\cdot\mathbf{l} = V$ – объем соленоида.

Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия (3.33) заключена в объеме соленоида и распределена в нем с постоянной объемной плотностью

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \qquad (3.34)$$

Выражение (3.34) для объемной плотности энергии магнитного поля имеет вид, аналогичный формуле для объемной плотности энергии электростатического поля, с той разницей, что электрические величины заменены в нем магнитными. Формула (3.34) выведена для однородного поля, но она справедлива и для неоднородных полей.

Примеры решения задач

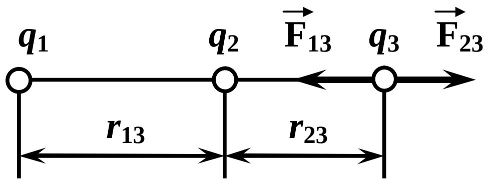
1. Электростатика

Пример 1.1

Два точечных заряда $q_1 = -10^{-8}$ Кл и $q_2 = 1{,}5\cdot10^{-8}$ Кл расположены на расстоянии $r_{12} = 10$ см друг от друга. Найти силу, действующую на точечный заряд $q_3 = 1\cdot10^{-8}$ Кл, помещенный на продолжении прямой r_{12} на расстоянии $r_{23} = 2$ см от заряда q_2.

Дано: $q_1 = -10^{-8}$ Кл, $q_2 = 1{,}5\cdot10^{-8}$ Кл, $q_3 = 1\cdot10^{-8}$ Кл, $r_{12} = 10$ см, $r_{23} = 2$ см.

Найти: F_3 – ?



Решение:

Сила F_3, действующая на заряд q_3, будет складываться из сил, действующих на него со стороны полей первого и второго зарядов (см. рис.). Следовательно,

$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{13} + \vec{\mathbf{F}}_{23}$. (1)

Учет знаков зарядов и их расположение показывает, что силы F_{13} и F_{23} коллинеарные и направлены в разные стороны. Считая направление направо положительным, можно векторное равенство (1) заменить скалярным, тогда

$F_3 = F_{23} - F_{13}$. (2)

Так как заряды по условию задачи являются точечными, то силы F_{13} и F_{23} определятся из закона Кулона. Переход от выражения (1) к скалярному равенству (2) был совершен с учетом знаков зарядов, поэтому в дальнейшем речь будет идти только об абсолютных значениях зарядов.

На основании закона Кулона запишем:

$$F_{13} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}^2}\ ; (3)$$

$$F_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}^2}\ , (4)$$

где r_{13} – расстояние между первым и третьим зарядом, равное (см. рис.) $r_{13} = r_{12} + r_{23}$.

Подставляя выражение (3) и (4), с учетом равенства (5), в формулу (2), получим:

$$F_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2}{r_{23}^2} - \frac{q_1}{(r_{12}+r_{23})^2}\right].$$

Подставим числовые значения:

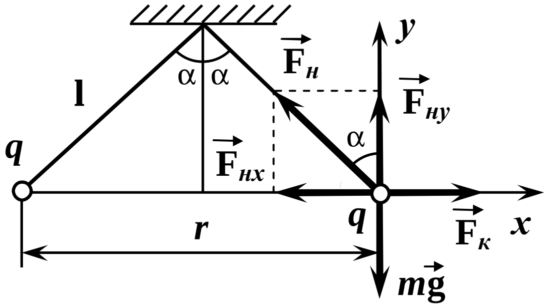
$$F_3 = 9\cdot10^9 \cdot 10^{-8} \cdot \left(\frac{1{,}5\cdot10^{-8}}{4\cdot10^{-4}} - \frac{10^{-8}}{144\cdot10^{-4}}\right) = 3{,}3\cdot10^{-4}\ (\text{Н}).$$

Пример 1.2

Два шарика одинакового радиуса и веса подвешены на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_0 = 4\cdot10^{-7}$ Кл они отталкиваются друг от друга и расходятся на угол 60 º. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика равно 20 см.

Дано: $q_0 = 4\cdot10^{-7}$ Кл, $\mathbf{l}$ = 20 см, $2\alpha = 60º$.

Найти: m – ?



Решение:

Обозначим угол между нитями 2 α. На каждый шарик действует три силы: вес тела mg, сила кулоновского отталкивания $\vec{\mathbf{F}}_K$ и сила натяжения нити $\vec{\mathbf{F}}_H$.

Так как шарик неподвижен, то геометрическая сумма сил, действующих на шарик, должна быть равна нулю:

$\vec{\mathbf{F}}_K + \vec{\mathbf{F}}_H + m\vec{\mathbf{g}} = 0.$ (1)

Проецируем это уравнение на оси X и Y. Ось X выбираем по направлению кулоновской силы $\vec{\mathbf{F}}_K$, а ось Y перпендикулярно ей, вверх.

Уравнение (1) в проекции на оси X и Y будут иметь вид:

$F_K - F_H \cdot \sin\alpha = 0;$ (2)

$F_H \cdot \cos\alpha - mg = 0.$ (3)

Представим уравнения (2), (3) в следующем виде:

$F_K = F_H \cdot \sin\alpha;$ (4)

$mg = F_H \cdot \cos\alpha.$ (5)

Поделив уравнение (4) на (5), получим $\dfrac{F_K}{mg} = tg(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, или

$F_K = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha.$ (6)

Сила кулоновского отталкивания F_1 определится из закона Кулона

$$F_K = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (6), получим

$$mg \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где r – расстояние между шариками, которое определяется как $\dfrac{r}{2} = \mathbf{l}\sin\alpha$ или $r = 2\mathbf{l}\sin\alpha$.

Тогда $$m = \frac{F_K}{g \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{q^2}{g \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \cdot 4l^2 \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}.$$

Заряд каждого шарика $q = \dfrac{q_0}{2}$. Подставим числовые значения:

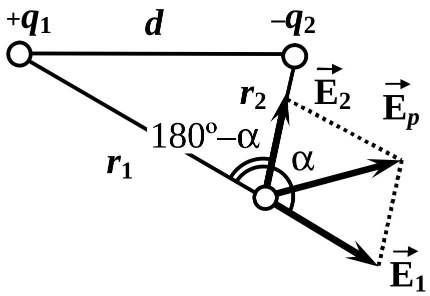
$$m = \frac{(2\cdot 10^{-7})^2}{9{,}8\cdot 9\cdot 10^9\cdot(2\cdot 0{,}2\cdot\sin 30^\circ)^2\cdot \mathrm{tg}\,30^\circ} = 1{,}6\cdot 10^{-3}\ (\text{кг}).$$

Пример 1.3

Два точечных заряда $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = -5$ нКл находятся в воздухе на расстоянии $d = 7$ см друг от друга. Определить напряженность и потенциал электрического поля, созданного этими зарядами в точке, удаленной от положительного заряда на расстояние $r_1 = 5$ см и от отрицательного заряда на $r_2 = 4$ см (1 нКл = 10^{-9} Кл).

Дано: $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = -5$ нКл, $d = 7$ см, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 4$ см.

Найти: E_p – ? φ_p – ?



Решение:

Согласно принципу суперпозиции полей, напряженность электрического поля $\vec{E}_p$ в данной точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (1)$$

Напряженности электрического поля, создаваемые первым и вторым зарядами соответственно равны:

$$E_1 = k\cdot\frac{q_1}{r_1^2};\ E_2 = k\cdot\frac{q_2}{r_2^2},\ (2)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9$ (Н·м^2/Кл^2) – коэффициент пропорциональности;

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ (Ф/м) – электрическая постоянная.

Вектор $\vec{E}_1$ направлен по силовой линии заряда q_1 от заряда, т.к. $q_1 > 0$. Вектор $\vec{E}_2$ направлен по силовой линии заряда q_2 к заряду, т.к. $q_2 < 0$. Модуль результирующего вектора найдем по теореме косинусов:

$$E_p^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha\ ,\ (3)$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

Угол α может быть найден из треугольника со сторонами d, r_1 и r_2, где противолежащий стороне d угол равен 180º–α. Применив теорему косинусов, получим $d_2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\pi-\alpha)$, откуда $\cos(\pi-\alpha) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2\cdot r_1\cdot r_2}$.

Во втором уравнении, составленном по теореме косинусов, угол π–α является противолежащим углом, поэтому в уравнении стоит знак минус.

Подставив числовые значения, получим $\cos(\pi-\alpha) = \frac{25+16-49}{2\cdot 4\cdot 5} = -0{,}2$.

Следовательно, $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha) = 0{,}2$.

Вычислим модули напряженностей $\vec{\mathbf{E}}_1$ и $\vec{\mathbf{E}}_2$. Получим:

$$E_1 = 9\cdot10^9 = \frac{4\cdot10^{-9}}{25\cdot10^{-4}} = \frac{36}{25}\cdot10^4 = 1{,}44\cdot10^4 \text{ (В/м)},$$

$$E_2 = 9\cdot10^9 = \frac{5\cdot10^{-9}}{16\cdot10^{-4}} = \frac{45}{16}\cdot10^4 = 2{,}812\cdot10^4 \text{ (В/м)}.$$

Поставляя численные значения в уравнение (3) получим:

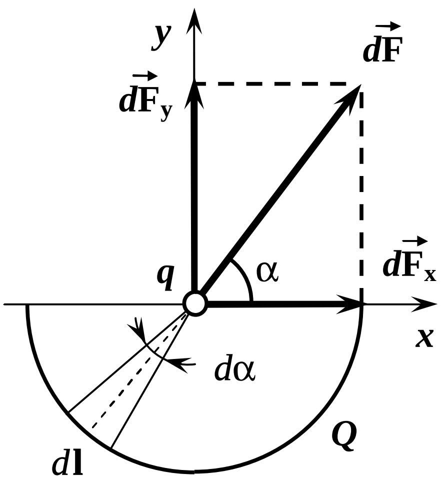
$$E_p^2 = (1{,}44\cdot10^4) + (2{,}812\cdot10^4) + 2\cdot1{,}44\cdot10^4\cdot2{,}812\cdot10^4\cdot0{,}2 \approx 11{,}6\cdot10^8.$$

Откуда величина модуля результирующего вектора напряженности равна $E_p = 3{,}4\cdot10^4$ В/м.

Результирующий потенциал поля в искомой точке найдем согласно принципу суперпозиции для потенциалов, как алгебраическая сумма потенциалов φ_1 и φ_2, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности $\varphi_p = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 = k\cdot\frac{q_1}{r_1}$; $\varphi_1 = k\cdot\frac{q_2}{r_2}$.

Так как $q_1 > 0$, потенциал $\varphi_1 > 0$, $q_2 < 0$, потенциал $\varphi_2 < 0$. Подставив числовые значения, найдем величину результирующего потенциала:

$$\varphi_p = \frac{9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-9}}{0{,}05} - \frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-9}}{0{,}04} = 720 - 1125 = -405 \text{ (В)}.$$



Пример 1.4

Точечный заряд $q = 2\cdot10^{-8}$ Кл расположен в центре полукольца радиуса $r_0 = 5$ см, по которому равномерно распределен заряд $Q = 3\cdot10^{-7}$ Кл. Найти силу, действующую на этот точечный заряд со стороны заряда Q, распределенного на полукольце.

Дано: $q = 2\cdot10^{-8}$ Кл, $Q = 3\cdot10^{-7}$ Кл, $r_0 = 5$ см.

Найти: F – ?

Решение:

Найти силу, действующую на точечный заряд q, непосредственно из закона Кулона нельзя, так как полукольцо не представляет собой точечного заряда. Но можно определить эту силу как результирующую элементарных сил, действующих со стороны достаточно малых элементов $d\mathbf{l}$ полукольца. Размеры элемента $d\mathbf{l}$ очень малы, а сосредоточенный на нем заряд можно рассматривать как точечный.

Поскольку заряд Q распределен по полукольцу равномерно, то элемент $d\mathbf{l}$ будет обладать зарядом

$$dQ = \frac{Q}{\pi r_0}\cdot d\mathbf{l}. \quad (1)$$

Элементарная сила, действующая на точечный заряд q, направлена по прямой, соединяющей заряд q и элемент $d\mathbf{l}$ (рис.) и, согласно закону Кулона, равна

$$dF = \frac{q \cdot dQ}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}. \quad (2)$$

При переходе от одного элемента полукольца к другому числовое значение элементарных сил $d\vec{\mathbf{F}}$ не будет меняться, но будет меняться их направление. Поэтому следует отдельно искать проекции результирующей силы на оси координат. В данной задаче все элементарные векторы $d\vec{\mathbf{F}}$ лежат в плоскости полукольца, поэтому можно ограничиться двумя осями, направив их (из соображения симметрии) так, как показано на рисунке.

Проецируем вектор $d\vec{\mathbf{F}}$ на оси X и Y: $dF_x = dF \cdot \cos\alpha$, $dF_y = dF \cdot \sin\alpha$.

Чтобы найти проекцию результирующей силы F на оси, будем интегрировать соответствующие проекции элементарных сил по полукольцу:

$$F_x = \int dF_x = \int dF \cdot \cos\alpha\ ; \quad (3)$$

$$F_y = \int dF_y = \int dF \cdot \sin\alpha\ . \quad (4)$$

В обоих случаях интеграл берется по полукольцу, что соответствует изменению угла α в пределах от 0 до π. Подставляя формулы (1) и (2) в выражение (3) и (4) и, учитывая, что $d\mathbf{l} = r_0 \cdot d\alpha$, где $d\alpha$ – раствор угла, под которым виден элемент $d\mathbf{l}$ из точки расположения заряда q, находим:

$$F_x = \frac{Qq}{4\pi^2\varepsilon_0 r_0^2}\int_0^{\pi}\cos\alpha\ d\alpha = 0\ ; \quad (5)$$

$$F_y = \frac{Qq}{4\pi^2\varepsilon_0 r_0^2}\int_0^{\pi}\sin\alpha\ d\alpha = \frac{Qq}{2\pi^2\varepsilon_0 r_0^2}. \quad (6)$$

Следовательно, $F = F_y = \dfrac{Qq}{2\pi^2\varepsilon_0 r_0^2}$. (7)

Подставим числовые значения: $F = \dfrac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-8} \cdot 3\cdot 10^{-7}}{0{,}05^2} = 1{,}14\cdot 10^{-3}$ (Н).

Таким образом, результирующая сила, действующая на точечный заряд, который расположен в центре полукольца, направлена вдоль оси Y.

Пример 1.5

Тонкий стержень длиной $\mathbf{l}_0 = 10$ см равномерно заряжен положительным зарядом $Q = 10^{-7}$ Кл. Найти силу, действующую на точечный заряд $q = 2\cdot 10^{-8}$ Кл, который расположен на продолжении стержня, на расстоянии $X_0 = 20$ см от его ближайшего конца. Найти напряженность поля в точках, лежащих на продолжении стержня, как функцию расстояния x_0 до стержня.

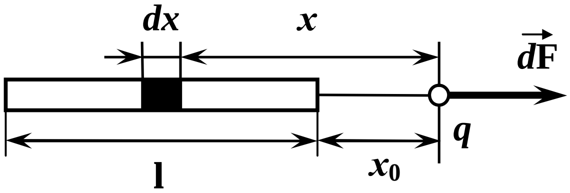
Дано: $q = 2\cdot 10^{-8}$ Кл, $Q = 10^{-7}$ Кл, $\mathbf{l}_0 = 10$ см, $X_0 = 20$ см.

Найти: $E(x_0)$ – ?

Решение.

Как и в предыдущей задаче, искомую силу можно найти как результирующую элементарных сил dF, действующих на точечный заряд со стороны полей отдельных малых равных элементов dx стержня (рис.). Выделим на стержне элемент длины dx, на котором будет сосредоточен точечный заряд dQ.

Ввиду равномерного распределения заряда Q по стержню, заряд dQ можно выразить формулой



$$dQ = \tau \cdot dx = \frac{Q}{\mathbf{l}_0}\, dx, \quad (1)$$

где τ – линейная плотность заряда, распределенного на стержне.

Согласно закону Кулона, сила взаимодействия точечных зарядов q и dQ определится как:

$$dF = \frac{q \cdot dQ}{4\pi\varepsilon_0 x^2}, \quad (2)$$

где dQ – заряд элемента dx, x – расстояние от элемента dx до точечного заряда q.

Все элементарные силы $d\vec{\mathbf{F}}$ взаимодействия точечных зарядов q и dQ, сосредоточенных на элементах dx всего стержня, направлены в одну сторону, поэтому результирующая сила F определится скалярным суммированием сил dF. Ввиду непрерывного распределения зарядов dQ по стержню, F найдем интегрированием выражения (2):

$$F = \int dF. \quad (3)$$

Учитывая величину заряда dQ (1), определим dF как:

$$dF = \frac{dQ \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot x^2} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dx}{x^2}. \quad (4)$$

При интегрировании (4) по всей длине стержня переменная x меняется от x_0 до $x_0 + \mathbf{l}_0$. Следовательно, согласно (3), результирующая сила F определится

$$F = \frac{q \cdot Q}{4\pi \mathbf{l}_0 \varepsilon_0} \cdot \int_{x_0}^{x_0 + \mathbf{l}_0} \frac{dx}{x^2} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 l_0}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \mathbf{l}_0}\right). \quad (5)$$

Выражая заданные величины в СИ и производя подстановку числовых значений, находим

$$F = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-7}}{0{,}1}\left(\frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}3}\right) = 3 \cdot 10^{-5}\ (\text{Н}).$$

Согласно определению, напряженность поля в точке x_0 равна

$$E = \frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi \mathbf{l}_0 \varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \mathbf{l}_0}\right). \quad (6)$$

Полученное выражение будет справедливо для любой точки на продолжении стержня, т.е.

$$E(x_0) = \frac{Q}{4\pi \mathbf{l}_0 \varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \mathbf{l}_0}\right), (7)$$

где x_0 – расстояние от конца стержня до рассматриваемой точки.

Пример 1.6

Нить, на которой подвешен заряженный шарик с массой в 1 г и зарядом 1 нКл, отклоняется от вертикали на угол 30 ° в электрическом поле вертикальной заряженной бесконечной плоскости. Определить поверхностную плотность заряда этой плоскости.

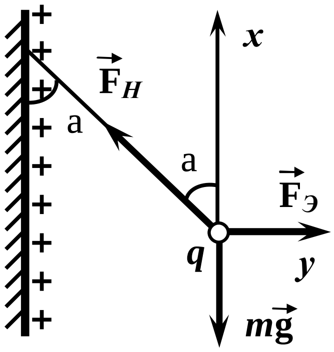
Дано: q = 1 нКл, m = 1 г, α = 30°.

Найти: σ – ?

Решение:

Бесконечная заряженная плоскость создает однородное электрическое поле, напряженность которого в любой точке определится

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, (1)$$



где σ – поверхностная плотность заряда, распределенного по плоскости.

Линии напряженности электрического поля перпендикулярны плоскости (см. рис.).

На шарик действуют три силы: вес mg, сила натяжения нити $\vec{F}_H$ и сила, действующая со стороны электрического поля заряженной плоскости

$$\vec{F}_Э = q \cdot \vec{E},$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля бесконечной заряженной плоскости.

Заряженный шарик, подвешенный на нити, отклоняется под действием силы $\vec{F}_Э$ на угол α и остается неподвижным. Следовательно, геометрическая сумма сил, действующих на шарик, должна быть равна нулю:

$$\vec{F}_Э + \vec{F}_H + m\vec{g} = 0. (2)$$

Проецируем это уравнение на оси X и Y. Ось X выбираем по направлению $\vec{F}_Э$, а ось Y, перпендикулярно ей, вверх. Уравнение (2) в проекциях на оси X и Y, будет иметь вид

$$F_Э - F_H \cdot \sin\alpha = 0, (3)$$
$$F_H \cdot \cos\alpha - mg = 0. (4)$$

Представим уравнения (3), (4) в следующем виде:

$$F_Э = F_H \cdot \sin\alpha , \quad (5)$$
$$mg = F_H \cdot \cos\alpha . \quad (6)$$

Поделив уравнение (5) на (6), получим

$$\frac{F_Э}{mg} = \mathrm{tg}\,\alpha, \text{ или } F_Э = mg \cdot \mathrm{tg}\,\alpha . \quad (7)$$

Определим силу $F_Э$, учитывая формулу (1), $F_Э = q \cdot E = q \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, и подставим это выражение в формулу (7): $q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = mg \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$. Откуда определим поверхностную плотность заряда σ:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 \cdot mg \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{q} . \quad (8)$$

Произведем подстановку числовых значений:

$$\sigma = \frac{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{10^{-9}} = 10^{-4} \text{ Кл/м.}$$

Пример 1.7

Два электрона, находящихся на бесконечно большом расстоянии один от другого, начинают двигаться навстречу друг другу. Определить наименьшее расстояние, на которое электроны могут сблизиться, если начальные скорости электронов одинаковы по величине, равны 10^6 м/с и противоположны по направлению.

Дано: $v = 10^6$ м/с.

Найти: r – ?

Решение:

Воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому полная энергия замкнутой системы остается постоянной. Полная энергия двух электронов складывается из кинетических энергий частиц W_K и потенциальной энергии взаимодействия зарядов $W_П$. В начальный момент времени электроны находились на бесконечно большом расстоянии друг от друга, поэтому потенциальной энергией взаимодействия зарядов можно пренебречь. Следовательно, полная энергия системы в начальный момент времени W_1 равна сумме кинетических энергий электронов:

$$W_1 = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2} = m v_0^2 . \quad (1)$$

При сближении электронов потенциальная энергия взаимодействия зарядов будет увеличиваться (см. уравнение (2)), а их кинетическая энергия уменьшаться, т.к. полная энергия остается постоянной. В конечный момент, когда электроны максимально сблизятся, скорость и их кинетическая энергия будут равны нулю. Следовательно, полная энергия системы в этот момент времени W_2 равна потенциальной энергии взаимодействия зарядов:

$$W_П = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}, \quad (2)$$

где r – расстояние между зарядами $q_1 = q_2 = e$.

Приравнивая значения (1) и (2) полной энергии системы в начальный и конечный моменты времени, получим $m\,\mathrm{v}_0^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r}$.

Откуда наименьшее расстояние определится $r = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m \cdot \mathrm{v}_0^2}$.

Произведем подстановку числовых значений:

$$r = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}} = 2{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

Пример 1.8

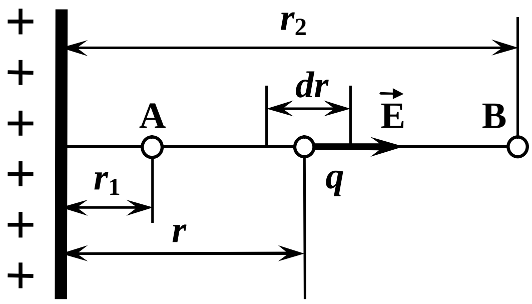
На расстоянии $r_1 = 4$ см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $q = 6 \cdot 10^{-8}$ Кл. Под действием поля заряд перемещается на расстояние $r_2 = 2$ см, при этом совершается работа $A = 5 \cdot 10^{-6}$ Дж. Определить линейную плотность заряда заряженной нити τ.

Дано: $q = 6 \cdot 10^{-8}$ Кл, $r_1 = 4$ см, $r_2 = 2$ см, $A = 5 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Найти: τ – ?

Решение:

Заряд q перемещается в поле заряженной нити из точки A в точку B. При перемещении заряда на пути $d\vec{\mathbf{r}}$, элементарная работа сил электростатического поля равна



$$dA = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = q \cdot \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}.$$

Так как векторы $\vec{\mathbf{E}}$ и $d\vec{\mathbf{r}}$ сонаправлены, то $dA = q \cdot E \cdot dr$. Работа по перемещению q из точки A в точку B определится интегрированием: $A = \int\limits_{r_1}^{r_2} q \cdot E \cdot dr$.

Напряженность E, созданная полем бесконечно длинной заряженной нити, равна $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, где τ – линейная плотность заряда, r – расстояние от нити до точечного заряда.

Тогда работа $A = \int\limits_{r_1}^{r_2} \dfrac{q\tau dr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \dfrac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln\dfrac{r_2}{r_1}$, откуда $\tau = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon A}{q \ln\dfrac{r_2}{r_1}}$.

Подставляя данные задачи, получим:

$$\tau = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 5\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-8}\cdot \ln 2} = 6{\cdot}10{-}7 \text{ (Кл/м).}$$

Пример 1.9

Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии $r_1 = 2$ см от нити, до точки $r_2 = 4$ см, α-частица изменила свою скорость от $v_1 = 2{\cdot}10^5$ м/с до $v_2 = 3{\cdot}10^6$ м/с. Найти линейную плотность заряда нити.

Дано: $v_1 = 2{\cdot}10^5$ м/с, $v_2 = 3{\cdot}10^6$ м/с, $q = 3{,}2{\cdot}10^{-19}$ Кл, $m = 6{,}64{\cdot}10^{-27}$ кг, $r_1 = 2$ см, $r_2 = 4$ см.

Найти: τ – ?

Решение:

Напряженность E, созданная полем бесконечно длинной заряженной нити, равна: $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, где τ – линейная плотность заряда, r – расстояние от нити до точечного заряда. Совершаемая работа по перемещению α-частицы определится:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} q\cdot E\cdot dr. \quad (1)$$

По закону сохранения энергии, работа по перемещению заряда равна приращению кинетической энергии частицы:

$$A = W_{K2} - W_{K1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (2)$$

Подставляя выражение для работы (1) в уравнение (2), получим:

$$\int_{r_1}^{r_2} q\cdot E\cdot dr = \frac{m\cdot v_2^2}{2} - \frac{m\cdot v_1^2}{2},$$

$$\int_{r_2}^{r_1} \frac{q\tau dr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Отсюда найдем линейную плотность заряда τ как:

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{qr\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}\right).$$

Подставляя данные задачи, получим

$$\tau = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot \ln 2}\cdot\frac{6{,}68}{2}\cdot(900-4)\cdot 10^{10} = 7{,}5\cdot 10^{-7} \text{ (Кл/м).}$$

Пример 1.10

Найти радиус шара r, находящегося в воздухе, если известно, что при поверхностной плотности заряда $\sigma = 0{,}46$ мкКл/м^2 его потенциал равен $\varphi = 1200$ В.

Дано: $\varphi = 1200$ В, $\sigma = 0{,}46$ мкКл/м^2.

Найти: r – ?

Решение:

Заряд шара q, его емкость C и его потенциал φ связаны отношением

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad (1)$$

где q – заряд шарика, распределенный по его поверхности, определится через поверхностную плотность заряда σ:

$$q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi r^2 . \quad (2)$$

Емкость шара равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r. \quad (3)$$

Объединяя уравнения (1) и (2), получим

$$C = \frac{\sigma \cdot 4\pi r^2}{\varphi}. \quad (4)$$

Подставив формулу (3) в уравнение (4), получим $4\pi\varepsilon_0 r = \dfrac{\sigma \cdot 4\pi r^2}{\varphi}$, откуда найдем окончательное выражение для r:

$$r = \frac{\varepsilon_0 \varphi}{\sigma}. \quad (5)$$

Подставляя числовые значения в равенство (5), получим

$$r = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{3}}{4{,}6 \cdot 10^{-7}} = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}.$$

Пример 1.11

Воздушный конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-9}$ Ф зарядили до напряжения $U_1 = 600$ В. Затем, отключив от источника, раздвинули пластины, увеличив расстояние между ними в 2 раза. Определите конечное напряжение U_2, заряд q_2 и работу A, которую надо совершить для увеличения расстояния между обкладками.

Дано: $C_1 = 10^{-9}$ Ф, $U_1 = 600$ В, $d_2 = 2d_1$.

Найти: U_2, q_2, A – ?

Решение:

Так как конденсатор отключен от источника тока, то заряд на пластинах не изменяется: $q_1 = q_2 = C_1 \cdot U_1 = 10^{-9} \cdot 600 = 6 \cdot 10^{-7}$ (Кл).

Емкость плоского конденсатора определяется формулой $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, из которой видно, что емкость плоского конденсатора C прямо пропорциональна площади пластин S и обратно пропорциональна расстоянию между обкладками d.

При раздвижении пластин расстояние между обкладками d увеличивается в два раза, следовательно, емкость конденсатора уменьшилась вдвое: $C \sim \dfrac{1}{d}$, $C_2 = \dfrac{C_1}{2} = 5 \cdot 10^{-10}$ (Ф).

Конечное напряжение $U_2 = \dfrac{q}{C_2} = \dfrac{2q}{C_1}. = 2U_1 = 1200$ (В).

Работа, которую необходимо совершить для увеличения расстояния между обкладками, равна разности энергий электрического поля конденсатора в конечном и первоначальном положении W_2 и W_1.

Первоначальная энергия электрического поля конденсатора

$$W_1 = \frac{C_1 \cdot U_1^2}{2} = \frac{10^{-9} \cdot 36 \cdot 10^4}{2} = 1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж).}$$

Энергия конденсатора W_2 после раздвижения пластин определится по формуле $W_2 = \dfrac{q^2}{2C_2} = \dfrac{2q^2}{2C_1} = 2W_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$ (Дж).

Таким образом, численное значение работы будет равно: $A = W_2 - W_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Пример 1.12

Как изменится емкость плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками поместить диэлектрическую пластинку ($\varepsilon = 6$), толщина которой равна половине расстояния между обкладками?

Дано: $\varepsilon = 6$.

Найти: $C_{об}/C_0$ – ?

Решение:

После того как между обкладками конденсатора поместили диэлектрическую пластинку, его можно рассматривать как батарею последовательно соединенных конденсаторов: первый – заполненный диэлектриком с емкостью $C_1 = \dfrac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, второй – воздушный с емкостью $C_2 = \dfrac{2\varepsilon_0 S}{d}$, расстояния между обкладками в каждом $d/2$ (d – расстояние между обкладками конденсатора).

Общая емкость батареи определится правилом последовательного соединения конденсаторов: $\dfrac{1}{C_{об}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$.

Емкости C_1 и C_2 можно выразить через первоначальную емкость плоского воздушного конденсатора $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$: $C_1 = 2\varepsilon C_0$, $C_2 = 2C_0$.

Отсюда общая емкость батареи будет равна: $C_{об} = \dfrac{2 \cdot \varepsilon \cdot C_0}{(\varepsilon + 1)}$.

Подставляя значение ε = 6, получаем ответ $C_{об} / C_0$ =12/7 = 1,714.

Пример 1.13

Как изменится емкость плоского воздушного конденсатора, пластины которого расположены вертикально, если конденсатор погрузить до половины в жидкий диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью равной 5?

Дано: ε = 5.

Найти: $C_{об} / C_0$ – ?

Решение:

После того как конденсатор погрузили в жидкий диэлектрик, его можно рассматривать как батарею параллельно соединенных конденсаторов: первый – заполненный диэлектриком с емкостью $C_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d}$, второй - воздушный с емкостью $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}$, площадь пластин каждого стала равна S/2.

Общая емкость батареи определится правилом параллельного соединения конденсаторов: $C_{об} = C_1 + C_2$.

Емкости C_1 и C_2 можно выразить через первоначальную емкость плоского воздушного конденсатора $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$: $C_1 = \varepsilon C_0 /2$, $C_2 = C_0/2$.

Отсюда общая емкость батареи будет равна: $C_{об} = \dfrac{C_0(\varepsilon + 1)}{2}$.

Подставляя значение ε = 5, получаем ответ $C_{об} / C_0$ =3.

Пример 1.14

Два плоских конденсатора одинаковой электроемкостью $C_1 = C_2 = C$ соединены в батарею последовательно и подключены к источнику тока с электродвижущей силой 10 В. Чему будет равна разность потенциалов на пластинах первого конденсатора, если пространство между пластинами второго конденсатора, не отключая источника тока, заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε = 7?

Дано: U = 10 В, ε = 7, $C_1 = C_2$.

Найти: U_1^* – ?

Решение:

До заполнения второго конденсатора диэлектриком разность потенциалов на пластинах обоих конденсаторов была одинакова: $U_1 = U_2 = U/2$. После заполнения электроемкость второго конденсатора возросла в ε раз: $C_2^* = \varepsilon \cdot C_2 = \varepsilon \cdot C$.

Электроемкость первого конденсатора не изменилась, т. е. $C_1^* = C$. Так как источник тока не отключался, то общая разность потенциалов на батарее конденсаторов осталась прежней, она лишь перераспределилась между конденсаторами. На первом конденсаторе $U_1^* = \frac{q}{C_1^*} = \frac{q}{C}$, где q – заряд на пластинах конденсатора. Поскольку при последовательном соединении конденсаторов заряд на каждой пластине и на всей батарее одинаков, то

$$q = C_{общ}^* \cdot U, \text{ где } C_{общ}^* = \frac{C_1^* \cdot C_2^*}{C_1^* + C_2^*} = \frac{C \cdot \varepsilon \cdot C}{C + \varepsilon \cdot C} = \frac{\varepsilon \cdot C}{1+\varepsilon}.$$

Таким образом, $q = \frac{\varepsilon \cdot C}{1+\varepsilon} \cdot U.$

Подставив это выражение заряда в формулу для U_1^*, найдем

$$U_1^* = \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon \cdot C \cdot U}{(1+\varepsilon) \cdot C} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot U.$$

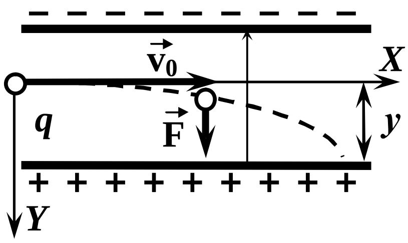
Подставляя значение ε = 7, получаем ответ U_1^* = 8,75 (В).

Пример 1.15

Электрон с некоторой начальной скоростью v_0 влетает в плоский конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов U = 300 В. Расстояние между пластинами d = 2 см, длина конденсатора **l** = 10 см. Какова должна быть предельная начальная скорость v_0 электрона, чтобы электрон не вылетал из конденсатора?

Дано: U = 300 В, **l** = 10 см, d = 2 см, $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: v_0 – ?



Решение:

Электрон в плоском конденсаторе будет двигаться по параболе, подобно горизонтально брошенному телу в поле силы тяжести. Траекторию электрона можно спроецировать на оси X и Y по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Ось X – горизонтально, ось Y – вертикально вниз.

На электрон в конденсаторе действует постоянная сила $F = eE$, направленная вдоль оси Y, под действием которой он получит ускорение $a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$, где $E = \frac{U}{d}$ – напряженность поля конденсатора. Следовательно, вдоль оси Y движение электрона равноускоренное с нулевой начальной скоростью, т. к. проекция v_0 на оси X равна нулю. Вдоль оси X на электрон не действуют никакие силы, следовательно, вдоль оси X движение происходит с постоянной скоростью v_0. Пролетая длину $\mathbf{l}$ конденсатора за время $t = \dfrac{\mathbf{l}}{v_0}$, электрон отклонится на расстояние

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{eE\mathbf{l}^2}{2mv_0^2} = \frac{e \cdot U \cdot \mathbf{l}^2}{2 \cdot m \cdot d^2}.$$

Чтобы электрон не вылетел из конденсатора, надо, чтобы $y \geq \dfrac{d}{2}$, где d – расстояние между пластинами конденсатора. Отсюда $v_0 \leq \dfrac{l}{d} \cdot \sqrt{\dfrac{e \cdot U}{m}}$. Подставляя числовые данные, получим предельную начальную скорость для электрона $v_0 = \dfrac{0{,}1}{0{,}02} \cdot \sqrt{\dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 300}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 3{,}6 \cdot 10^7$ м/с.

2. Постоянный электрический ток

Пример 2.1

Сила тока в проводнике с сопротивлением $R = 100$ Ом равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до $I = 10$ А за время $\tau = 30$ с. Определите заряд q, прошедший по проводнику, и выделившееся за это время в проводнике количество теплоты Q.

Дано: $R = 100$ Ом, $I_0 = 0$, $I = 10$ А, $\tau = 30$ с.

Найти: q, Q – ?

Решение:

Так как сила тока в проводнике возрастает равномерно от $I_0 = 0$ до $I = 10$ А, то можно считать, что I является некоторой функцией от времени t, причем эта зависимость линейна: $I = k \cdot t$. Коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I - I_0}{\tau} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \text{ (А/с)}. \quad (1)$$

Заряд dq, прошедший за время dt, определится как:

$$dq = I \cdot dt = k \cdot t \cdot dt, \quad (2)$$

Для определения всего заряд q, прошедший за время τ, нужно проинтегрировать (2) в пределах от 0 до τ:

$$q = \int_0^{\tau} k \cdot t \cdot dt = \frac{k\tau^2}{2}. \quad (3)$$

Подставляя численные значения в уравнение (3), получим: $q = \dfrac{30^2}{2 \cdot 3} = 150$ (Кл).

Количество теплоты dQ, выделившееся за время dt в проводнике, определится как:

$$dQ = I^2 \cdot R \cdot dt = k^2 \cdot R \cdot t^2 \cdot dt. \quad (4)$$

Полное количество теплоты Q, выделившееся за время τ, определится интегрированием:

$$Q = \int_0^{\tau} k^2 \cdot R \cdot t^2 \cdot dt = \frac{1}{3}\, k^2 \cdot R \cdot \tau^3 \quad (5)$$

Подставляя численные значения в формулу (5), получим:

$$Q = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot 100 \cdot 30^3 = 10^5 \text{ Дж, или } Q = 100 \text{ кДж.}$$

Пример 2.2

В медном проводнике сечением 6 мм ^{2} и длиной 5 м течет ток. За 1 мин в проводнике выделяется 18 Дж теплоты. Определить напряженность поля, плотность и силу электрического тока в проводнике.

Дано: $S = 6 \cdot 10^{-6}$ м ^{2}, $\mathbf{l} = 5$ м, $t = 60$ с; $Q = 18$ Дж, $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Найти: E, j, I – ?

Решение:

Для решения задачи используем законы Ома и Джоуля – Ленца. Закон Ома в дифференциальной форме имеет вид

$$j = \sigma \cdot E = E/\rho, \quad (1)$$

где j – плотность тока; E – напряженность поля; σ – удельная проводимость.

Закон Джоуля – Ленца записывается в виде

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t\,, \quad (2)$$

где I – сила тока, t – время,

Сопротивление проводника равно

$$R = \rho \frac{\mathbf{l}}{S}\,, \quad (3)$$

где ρ – удельное сопротивление, $\mathbf{l}$ – длина, S – площадь поперечного сечения проводника.

Силу тока I находим из уравнения (2) с учетом формулы (3):

$$I = \sqrt{\frac{Q}{R \cdot t}} = \sqrt{\frac{Q \cdot S}{\rho \cdot \mathbf{l} \cdot t}}; \quad I = \sqrt{\frac{18 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 60}} = 4{,}6 \text{ (А).}$$

По определению, плотность тока равна $j = I / S$:

$j = 4{,}6 / (6 \cdot 10^{-6}) = 7{,}7 \cdot 10^{5}$ (А/м ^{2}).

Напряженность поля в проводнике определим из формулы (1), учитывая, что $\sigma = 1 / \rho$.

$E = j \cdot \rho$; $E = 7{,}7 \cdot 10^{5} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ (В/м ^{2}).

Ответ: $E = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ В/м ^{2}, $I = 4{,}6$ А, $j = 7{,}7 \cdot 10^{5}$ А/м ^{2}.

Пример 2.3

Определить плотность j электрического тока в медном проводе (удельное сопротивление ρ = 17 нОм·м), если удельная тепловая мощность тока w = 1,7 Дж/(м^3·с) .

Дано: ρ =17 нОм·м=1,7·10^{-8} Ом·м, w =1,7 Дж/(м^3·с).

Найти: j – ?

Решение:

Согласно законам Джоуля – Ленца и Ома в дифференциальной форме ,

$w = \sigma \cdot E^2 = E^2 / \rho$; (1)

$j = \sigma \cdot E = E / \rho$, (2)

где σ и ρ – соответственно, удельные проводимость и сопротивление проводника. Из закона (2) получим , что $E = \rho \cdot j$. Подставив это выражение в уравнение (1), найдем искомую плотность тока: $j = \sqrt{w/\rho}$. Вычисляем:

$j = \sqrt{1.7/1.7 \cdot 10^{-8}} = 10$ (кА/м^2).

Пример 2.4

Внутреннее сопротивление аккумулятора 2 Ом. При замыкании его одним резистором сила тока равна 4 А, при замыкании другим – 2 А. Во внешней цепи в обоих случаях выделяется одинаковая мощность. Определить электродвижущую силу аккумулятора и внешние сопротивления.

Дано: r = 2 Ом, I_1 = 4 А, I_2 = 2 А, $P_1 = P_2$.

Найти: $\mathcal{e}$, $R1$, $R2$ – ?

Решение:

Запишем закон Ома для замкнутой (полной) цепи в первом и втором случаях:

$$I_1 = \frac{\mathcal{e}}{R_1 + r}; \; I_2 = \frac{\mathcal{e}}{R_2 + r}, \; (1)$$

где r – внутреннее сопротивление источника тока; ε – ЭДС аккумулятора; R_1 и R_2 – внешние сопротивления.

Уравнения (1) представим в виде

$$\mathcal{e} = I_1 (R_1 + r); \; \mathcal{e} = I_2 (R_2 + r). \; (2)$$

Из равенства (2) следует, что

$$I_1 (R_1 + r) = I_2 (R_2 + r). \; (3)$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи в первом и втором случаях, соответственно равна

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 ; \; P_2 = I_2^2 \cdot R_2$$

Из условия равенства мощностей следует, что

$$I_1^2 \cdot R_1 = I_2^2 \cdot R_2. \; (4)$$

Решим совместно уравнения (3) и (4). Для этого из обоих уравнений выражаем R_2:

$$R_2 = (R_1 + r)\,\frac{I_1}{I_2} - r\,;$$

$$R_2 = R_1\frac{I_1^2}{I_2^2}\,. \quad (5)$$

Теперь приравниваем полученные выражения и находим R_1:

$$R_1\frac{I_1^2}{I_2^2} = (R_1 + r)\,\frac{I_1}{I_2} - r\,;$$

$$R_1 = r\frac{I_2}{I_1}\,; \quad (6)$$

R_2 находим, подставляя уравнение (6) в формулу (5):

$$R_2 = r\frac{I_1}{I_2}\,.$$

Подставляем численные значения:

$$R_1 = 20\frac{2}{4} = 1\ (\text{Ом});\ R_2 = 20\frac{4}{2} = 4\ (\text{Ом}).$$

ЭДС источника находим, подставляя уравнение (6) в формулу (2):

$$\mathcal{E} = r\,I_1\left(\frac{I_1}{I_2} + 1\right);$$

$$\mathcal{E} = 4 \cdot 2\,(2 / 4 + 1) = 12\ \text{В}.$$

Ответ: $\mathcal{E}$ = 12 В, R_1 = 1 Ом, R_2 = 4 Ом.

Пример 2.5

Гальванический элемент замыкается один раз на сопротивление R_1 = 9 Ом, другой раз на R_2 = 4 Ом. В том и другом случаях количество теплоты Q, выделяющееся в сопротивлениях за одно и то же время, оказывается одинаковым. Каково внутреннее сопротивление элемента?

Дано: R_1 = 9 Ом, R_2 = 4 Ом.

Найти: r – ?

Решение:

Из того, что в обоих случаях за одинаковое время выделяется одинаковое количество теплоты, следует равенство мощностей: $P_1 = P_2 = P$.

Запишем закон Ома для замкнутой (полной) цепи в первом и втором случаях:

$$\mathcal{E} = I_1\,(R_1 + r);\ \mathcal{E} = I_2\,(R_2 + r). \quad (1)$$

Из равенства (1) следует, что

$$I_1\,(R_1 + r) = I_2\,(R_2 + r). \quad (2)$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи в первом и втором случаях, соответственно равна

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1\,;\ P_2 = I_2^2 \cdot R_2\ (3)$$

Из уравнений (3) выразим силы тока I_1 и I_2 : $I_1 = \sqrt{\frac{P}{R_1}}$ и $I_2 = \sqrt{\frac{P}{R_2}}$ и подставим в равенство (2):

$$\sqrt{\frac{P}{R_1}}(R_1 + r) = \sqrt{\frac{P}{R_2}}(R_2 + r). \quad (4)$$

Сократив на P, возведем левую и правую часть уравнения (4) в квадрат. После этих преобразований получим следующее равенство:

$$(R_1 + r)^2 R_2 = (R_2 + r)^2 R_1 \quad (5)$$

Раскрыв скобки, получаем

$$R_1^2 \cdot R_2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot r + R_2 \cdot r^2 = R_1 \cdot R_2^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot r + R_1 \cdot r^2 \ ;$$

$R_1 \cdot R_2 (R_1 - R_2) = r^2 (R_1 - R_2)$, откуда следует, $r = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$.

Подставим числовые значения: $r = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$ Ом.

Ответ: $r = 6$ Ом.

Пример 2.6

Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока, если при сопротивлении нагрузки $R_1 = 2$ Ом сила тока в цепи $I_1 = 0{,}4$ А, а при $R_2 = 1{,}5$ Ом $I_2 = 0{,}6$ А. Чему равна сила тока короткого замыкания?

Дано: $R_1 = 2$ Ом, $I_1 = 0{,}4$ А, $R_2 = 1{,}5$ Ом, $I_2 = 0{,}6$ А.

Найти: $I_{КЗ}$ – ?

Решение:

Ток короткого замыкания определяется отношением ЭДС к внутреннему сопротивлению:

$$I_{КЗ} = \frac{\mathcal{E}}{r}. \quad (1)$$

По закону Ома для цепи, содержащей ЭДС,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}. \quad (2)$$

Выразив из этих уравнений ЭДС, получаем

$$\mathcal{E} = I_1 (R_1 + r) = I_2 (R_2 + r). \quad (3)$$

Из соотношения (3) находим выражение для внутреннего сопротивления

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_2 - I_1}. \quad (4)$$

Подставим числовые значения в равенство (4):

$$r = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}5 - 0{,}4 \cdot 2}{0{,}6 - 0{,}4} = 0{,}5 \text{ (Ом)}.$$

Для нахождения ЭДС можно подставить значение r в одно из уравнений (2): $\mathcal{E} = I_1 (R_1 + r)$; $\mathcal{E} = 0{,}4 \cdot (2 + 0{,}5) = 1$ (В).

Подставив значения ЭДС и внутреннего сопротивления в уравнение (1), получаем численное значение $I_{КЗ}$: $I_{КЗ} = \frac{1}{0{,}5} = 2$ (А).

Пример 2.7

Определить внутреннее сопротивление источника тока, если во внешней цепи при силе тока $I_1 = 4$ А развивается мощность $P_1 = 10$ Вт, а при силе тока $I_2 = 6$ А – мощность $P_2 = 12$ Вт.

Дано : $I_1 = 4$ А, $P_1 = 10$ Вт, $I_2 = 6$ А, $P_2 = 12$ Вт.

Найти: r – ?

Решение:

Мощность, развиваемая током, согласно закону Джоуля – Ленца, определяется выражением

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 \text{ и } P_2 = I_2^2 \cdot R_2, \quad (1)$$

где R_1 и R_2 – сопротивление внешней цепи. Согласно закону Ома,

$$I_1 = \frac{e}{R_1 + r}; \; I_2 = \frac{e}{R_2 + r},$$

где e – ЭДС источника.

Решив эти уравнения относительно r, получим

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_2 - I_1}. \quad (2)$$

Выразив $I_1 R_1$ и $I_2 R_2$ из уравнений (1) и подставив в выражение (2), найдем внутреннее сопротивление источника тока: $r = \frac{P_1 / I_1 - P_2 / I_2}{I_2 - I_1}$.

Вычисляя, получаем : $r = \frac{10/4 - 12/6}{6 - 4} = 0{,}25$ (Ом).

Пример 2.8

ЭДС батареи равна 20 В. Коэффициент полезного действия батареи при силе тока 4 А, составляет 0,8. Чему равно внутреннее сопротивление батареи?

Дано: $e = 20$ В, $\eta = 0{,}8$, $I = 4$ А.

Найти: r – ?

Решение:

Коэффициент полезного действия источника тока η равен отношению падения напряжения во внешней цепи к его электродвижущей силе:

$$\eta = \frac{R \cdot I}{e}. \quad (1)$$

Откуда $R = \frac{\eta \cdot e}{I}$. (2)

Используя выражение закона Ома для замкнутой цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$, получаем:

$$\eta = \frac{R}{R+r}. \quad (3)$$

Подставляя уравнение (2) в равенство (3) и выполняя преобразования, находим

$$r = \frac{\mathcal{E}(1-\eta)}{I}; \; r = \frac{20 \cdot (1-0{,}8)}{4} = 1 \text{ (Ом)}.$$

Ответ: r = 1 Ом.

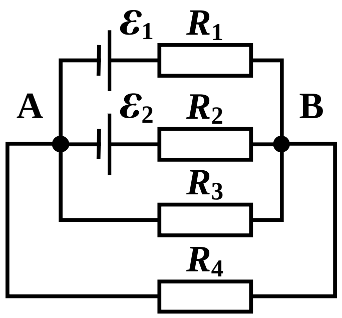
Пример 2.9

Источники тока с электродвижущими силами $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ включены в цепь, как показано на рисунке. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3, если $\mathcal{E}_1$ = 10 В и $\mathcal{E}_2$ = 4 В, а $R_1 = R_4$ = 2 Ом и $R_2 = R_3$ = 4 Ом. Сопротивлениями источников тока следует пренебречь.

Дано : $\mathcal{E}_1$ = 10 В, $\mathcal{E}_2$ = 4 В, $R_1 = R_4$ = 2 Ом, $R_2 = R_3$ = 4 Ом.

Найти: I_2, I_3 – ?

Решение:



Силы токов в разветвленной цепи определяют с помощью законов Кирхгофа. Чтобы найти четыре значения силы токов, следует составить четыре уравнения.

Перед составлением уравнений по закону Кирхгофа необходимо, во-первых, выбрать произвольно направления токов, текущих через сопротивления, указав их стрелками на чертеже, и, во-вторых, выбрать направление обхода контуров (для составления уравнений по второму закону Кирхгофа).

Выберем направления токов, как они показаны на рисунке, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

Рассматриваемая в задаче схема имеет два узла: *A* и *B*. Но составлять уравнение по первому закону Кирхгофа следует только для одного узла, так как уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого уравнения.

При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком плюс; ток, отходящий от узла,— со знаком минус.

По первому закону Кирхгофа для узла *B* имеем:

$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$

Недостающие три уравнения получим по второму закону Кирхгофа. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо соблюдать следующеи правила знаков:

1) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контуров, то соответствующее произведение $I \cdot R$ входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае произведение $I \cdot R$ входит в уравнение со знаком минус;

2) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т. е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

По второму закону Кирхгофа имеем соответственно для контуров:

AR_1BR_2A : $$I_1 R_1 - I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 ; \quad (1)$$

AR_1BR_3A : $$I_1 R_1 - I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 ; \quad (2)$$

AR_3BR_4A : $$I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0 . \quad (3)$$

Подставив в равенства (1)–(3) значения сопротивлений и ЭДС, получим систему уравнений:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 ;$$
$$2 \cdot I_1 - 4 \cdot I_2 = 6 ;$$
$$2 \cdot I_1 - 4 \cdot I_3 = 10 ;$$
$$4 \cdot I_3 + 2 \cdot I_4 = 0 .$$

Решая систему уравнений, находим искомые значения токов: $I_2 = 0$, $I_3 = -1$А.

Знак минус у значения силы тока I_3 соответствует тому, что выбранное вначале направление тока противоположно истинному.

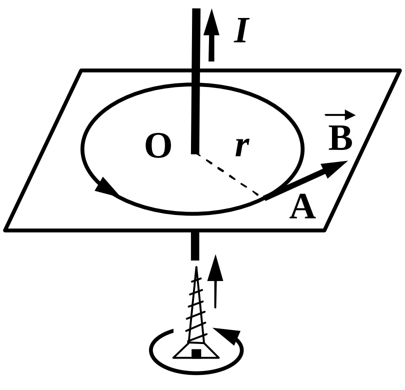
3. Электромагнетизм

Пример 3.1

По длинному прямому тонкому проводу течет ток силой $I = 20$ А. Определить магнитную индукцию $\vec{\mathbf{B}}$ поля, создаваемого проводником в точке, удаленной от него на расстояние $r = 4$ см.

Дано: $I = 20$ А, $r = 4$ см $= 4 \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: B – ?



Решение:

В задаче рассматривается явление создания магнитного поля проводником с током.

Проведем силовую линию магнитного поля через точку А, в которой определяется магнитная индукция $\vec{\mathbf{B}}$. Магнитное поле, создаваемое проводником бесконечной длины, обладает осевой симметрией. Поэтому в плоскости, проходящей через точку А и перпендикулярной проводу, проведем окружность радиуса ОА = r (см. рис.). Направление силовой линии и направление тока связаны правилом правого винта (буравчика): если поступательное движение винта направить по току, то вращательное движение головки винта укажет направление силовой линии (см. рис.).

Определение направления силовой линии следует из закона Био–Савара–Лапласа, записанного в векторной форме (3.5). Вектор $\vec{\mathbf{B}}$ совпадает с касательной в точке А и направлен так же, как силовая линия.

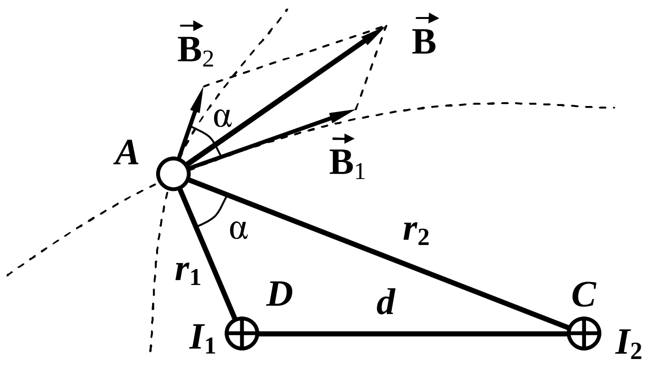
Запишем выражение для магнитной индукции поля бесконечно длинного проводника с током на расстоянии r от него из уравнения (3.9): $B = \dfrac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}$. Считая, что проводник находится в вакууме (μ=1), вычисляем, подставляя все величины в единицах системы СИ: $B = \dfrac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2\pi \cdot 0{,}04} = \mathbf{5} \cdot 10^{-5}$ (Тл).

Пример 3.2

Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I_1 = I_2 = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию $\vec{\mathbf{B}}$ поля, создаваемого проводником с током в точке А, отстоящей от оси одного проводника на расстояние $r_1 = 5$ см, от другого – $r_2 = 12$ см.

Дано: $I_1 = I_2 = 60$ А, $d = 10$ см = 0,1 м, $r_1 = 5$ см = 0,05 м, $r_2 = 12$ см = 0,12 м.

Найти: B – ?



Решение:

В задаче рассматривается явление создания магнитного поля системой проводников.

Проведем через точку А часть силовой линии магнитного поля, создаваемого током I_1, а затем часть силовой линии магнитного поля, которое создается током I_2 (пунктирные дуги). Построим $\vec{\mathbf{B}}_1$ и $\vec{\mathbf{B}}_2$ как касательные к этим дугам в точке А (см. пример 3.1). Так как магнитные индукции определяются по формулам

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_1} \text{ и } B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_2}, \quad (1)$$

токи $I_1 = I_2 = I$, а $r_1 < r_2$, то $B_1 > B_2$.

Для нахождения в точке А магнитной индукции B, создаваемой системой проводников с токами, воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого сложим $\vec{\mathbf{B}}_1$ и $\vec{\mathbf{B}}_2$ геометрически, по правилу параллелограмма: $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2$. Модуль вектора $\vec{\mathbf{B}}$ найдем по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2(-\cos\alpha)};$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}, \quad (2)$$

где α – угол между векторами $\vec{\mathbf{B}}_1$ и $\vec{\mathbf{B}}_2$. Подставляя B_1 и B_2 (1) в формулу (2), и вынося $\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}$ за знак корня, получаем

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}. \quad (3)$$

Найдем cos α из треугольника DAC. Заметим, что $\alpha = \angle DAC$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами ($AD \perp \vec{\mathbf{B}}_1$, $AC \perp \vec{\mathbf{B}}_2$; AD, AC – радиусы, $\vec{\mathbf{B}}_1$ и $\vec{\mathbf{B}}_2$ – касательные в точке A). По теореме косинусов запишем $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos\alpha$, где d = DC – расстояние между проводами. Отсюда $\cos\alpha = \frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}$; $\cos\alpha = \frac{5^2+12^2-10^2}{2\cdot5\cdot12} = \frac{23}{40} = 0{,}575$.

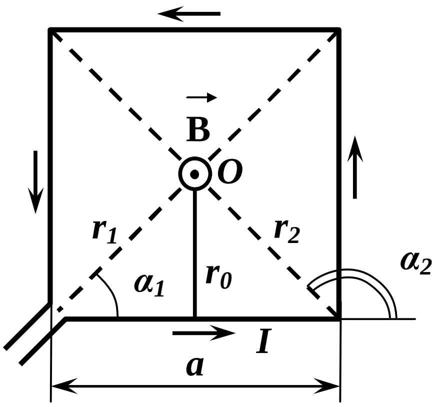
Подставим в формулу (3) числовые значения физических величин и вычислим B: $B = \frac{4\cdot3{,}14\cdot10^{-7}\cdot60}{2\cdot3{,}14}\sqrt{\frac{1}{0{,}05^2}+\frac{1}{0{,}12^2}+\frac{2}{0{,}05\cdot0{,}12}0{,}575} =$
$= 3{,}08\cdot10^{-4}$ (Тл) = 308 (мкТл).

Пример 3.3

По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной a = 10 см, течет ток силой I = 100 А. Найти магнитную индукцию В в точке О пересечения диагоналей квадрата.

Дано: I = 100 А, a = 10 см = 0,1 м.

Найти: B – ?



Решение:

В задаче рассматривается явление создания магнитного поля проводником с током сложной формы.

Условно разобьем проводник сложной формы (квадрат, см. рис.) на проводники простой формы (отрезки длиной a), и используем принцип суперпозиции полей, созданных отрезками в точке О.

В данной задаче система состоит из четырех одинаковых отрезков длиной a. В точке О отрезки с током создают магнитные индукции $\vec{\mathbf{B}}_1$, $\vec{\mathbf{B}}_2$, $\vec{\mathbf{B}}_3$, $\vec{\mathbf{B}}_4$. По принципу суперпозиции магнитных полей

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 + \vec{\mathbf{B}}_3 + \vec{\mathbf{B}}_4. \quad (1)$$

Направления всех векторов индукции, определенные по правилу буравчика, одинаковы (перпендикулярны плоскости квадрата и направлены «к нам», что обозначено символом $\odot$). Кроме того, все отрезки имеют одну и ту же длину, по ним протекает один и тот же ток, и расположены они на одном расстоянии от точки O. Поэтому $\vec{\mathbf{B}}_1 = \vec{\mathbf{B}}_2 = \vec{\mathbf{B}}_3 = \vec{\mathbf{B}}_4$. Это позволяет заменить векторное равенство скалярным : $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$. Тогда

$$B = 4 \cdot B_1. \qquad (2)$$

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком прямого провода с током выражается формулой (3.8)

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2), \qquad (3)$$

где α_1 – угол между проводом в направлении тока и радиус-вектором r_1, α_2 – угол между продолжением провода в направлении тока и радиус-вектором r_2. Учитывая, что $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, $\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos\alpha_1$ (см. рис), формулу (3) можно переписать в виде

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}[\cos\alpha_1 - (-\cos\alpha_1)] = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}\cos\alpha_1. \qquad (4)$$

Подставив уравнение (4) в формулу (2), найдем $B = \dfrac{2\mu\mu_0 I}{\pi r_0}\cos\alpha_1$.

Заметив, что $r_0 = a/2$ и $\cos\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (т. к. $\alpha_1 = \pi/4$), получим $B = \dfrac{2\sqrt{2}\mu\mu_0 I}{\pi a}$.

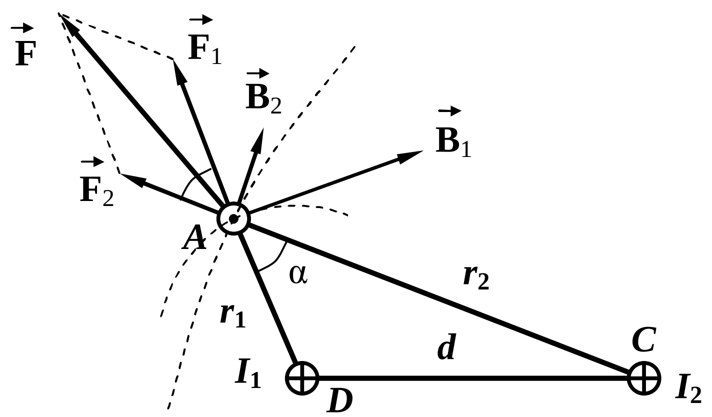
Вычисляем в системе единиц СИ индукцию $B = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 100}{\pi\cdot 0{,}1} =$ $1{,}13\cdot 10^{-3}$ (Тл) = 1,13 (мТл).

Пример 3.4

Два параллельных бесконечно длинных провода *D* и *C*, по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I_1 = I_2 = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. На расстоянии $r_1 = 5$ см от одного проводника и на расстоянии $r_2 = 12$ см от другого помещен третий проводник A, по которому течет ток противоположного направления силой $I_3 = 20$ А. Определить силу, действующую на третий проводник, если его длина $\mathbf{l} = 10$ м.

Дано: $I_1 = I_2 = 60$ А, $I_3 = 20$ А, $d = 10$ см = 0,1 м, $r_1 = 5$ см = 0,05 м, $r_2 = 12$ см = 0,12 м, $\mathbf{l} = 10$ м.

Найти: F – ?



Решение:

В задаче рассматривается явление силового действия магнитного поля на проводник с током.

Проводники D и C создают магнитные поля с индукциями $\vec{\mathbf{B}}_1$ и $\vec{\mathbf{B}}_2$ в месте нахождения проводника A (построение $\vec{\mathbf{B}}_1$ и

$\vec{\mathbf{B}}_2$ рассмотрено в примере 3.2). В этих полях на проводник A действуют силы Ампера $\vec{\mathbf{F}}_1$ и $\vec{\mathbf{F}}_2$. Необходимо найти векторную сумму этих двух сил: $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2$.

$\vec{\mathbf{F}}_1$ и $\vec{\mathbf{F}}_2$ – силы взаимодействия между параллельными бесконечными проводниками. Для определения этих сил можно воспользоваться полученной ранее формулой (3.15).

Между токами I_1 и I_3 действует сила $\vec{\mathbf{F}}_1$, её величина равна

$$F_1 = \int_0^{\mathbf{l}} \frac{\mu\mu_0 I_1 I_3}{2\pi r_1} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi r_1}\mathbf{l} \quad (\mu = 1). \quad (1)$$

Между токами I_2 и I_3 действует сила $\vec{\mathbf{F}}_2$, её величина равна

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_2 I_3}{2\pi r_2}\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi r_2}\mathbf{l} \text{ (т. к. по условию } I_1 = I_2\text{)}. \quad (2)$$

Токи в проводниках A и D, а также в проводниках A и C имеют противоположное направление, поэтому силы $\vec{\mathbf{F}}_1$ и $\vec{\mathbf{F}}_2$ являются силами отталкивания и направлены по r_1 и r_2 в стороны от проводников D и C (см. рис.). Результирующую силу $\vec{\mathbf{F}}$ найдем как геометрическую сумму $\vec{\mathbf{F}}_1$ и $\vec{\mathbf{F}}_2$ по правилу параллелограмма.

Из рисунка видно, что угол между $\vec{\mathbf{F}}_1$ и $\vec{\mathbf{F}}_2$ равен углу α в треугольнике DAC, так как эти углы вертикальные. Модуль $\vec{\mathbf{F}}$ найдем по теореме косинусов

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}. \quad (3)$$

Подставляя формулы (1) и (2) в формулу (3) и вынося $\frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi} l$ за знак корня, получим

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi} l \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}. \quad (4)$$

Найдем cos α из треугольника DAC. По теореме косинусов запишем $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\ r_1 r_2\ \cos\ \alpha$, где d = DC. Отсюда $\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$;

$$\cos\alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2\cdot 5\cdot 12} = \frac{23}{40} = 0{,}575.$$

Подставим в формулу (4) числовые значения физических величин в единицах СИ и вычислим F:

$$F = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 60\cdot 20\cdot 10}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{1}{0{,}05^2} + \frac{1}{0{,}12^2} + \frac{2}{0{,}05\cdot 0{,}12}0{,}575} =$$

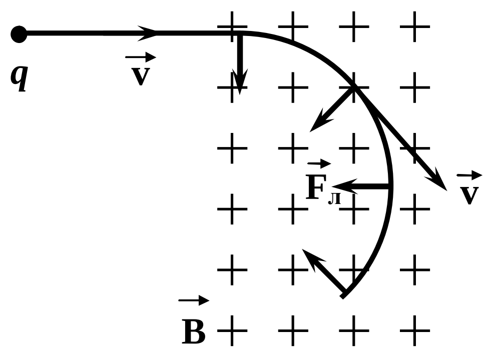
$= 61{,}6\cdot 10^{-3}$ (Н) = 61,6 (мН).

Пример 3.5

Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 400$ В, попал в однородное магнитное поле напряженностью $H = 1$ кА/м. Определить радиус R кривизны траектории и частоту ν обращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости перпендикулярен линиям поля.

Дано: $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $U = 100$ В, $H = 1$ кВ/А = 1000 В/А, $\vec{\mathbf{v}} \perp \vec{\mathbf{B}}$.

Найти: R – ? ν – ?



Решение:

В задаче рассматривается явление силового действия магнитного поля на движущийся заряд.

На движущийся в магнитном поле заряд действует сила Лоренца $\vec{\mathbf{F}}_{\text{л}}$ (действием силы тяжести можно пренебречь). Сила Лоренца (3.18) перпендикулярна вектору скорости и, следовательно, сообщает электрону нормальное (центростремительное) ускорение. По второму закону Ньютона $F_{\text{л}} = ma_n$, где a_n – нормальное ускорение или

$$|q|\cdot v\cdot B\cdot \sin\alpha = mv^2/R, \quad (1)$$

где $|q|$ – модуль заряда электрона; v – скорость электрона; B – магнитная индукция; m – масса электрона; R – радиус кривизны траектории; α – угол между векторами $\vec{\mathbf{v}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ (в данном случае $\alpha = 90^\circ$, $\sin\alpha = 1$).

Из формулы (1) найдем

$$R = \frac{mv}{|q|B}. \quad (2)$$

Входящий в это равенство импульс $p = m$v может быть выражен через кинетическую энергию $W_{\text{к}}$ электрона:

$$W_{\text{к}} = mv^2/2 = p^2/2m, \; p = mv = \sqrt{2mW_к}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, определяется работой электрического поля по ускорению электрона и по закону сохранения энергии $W_{\text{к}} = A = |q|\cdot U$. Подставляя это выражение в формулу (3), получим $p = mv = \sqrt{2m\,|\,q\,|\,U}$.

Магнитная индукция B может быть выражена через напряженность H магнитного поля в вакууме (3.4, $\mu = 1$): $B = \mu_0 H$. Подставив выражения для B и mv в формулу (2), получим $R = \dfrac{\sqrt{2m\,|\,q\,|\,U}}{\mu_0\,|\,q\,|\,H}$. Проведем вычисления в единицах системы СИ:

$$R = \frac{\sqrt{2\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 400}}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1000} = 0{,}0537 \text{ (м)} = 5{,}37 \text{ (см)}.$$

Учитывая, что частота $\nu = 1/T$ и $T = 2\pi R/$v, получим формулу, связывающую частоту со скоростью и радиусом: $\nu = v/2\ \pi R$ (5). Подставив формулу (2) в выражение (5), получим $\nu = |q|B\ /\ 2\pi m$ или $\nu = \mu_0|q|H\ /\ 2\pi m$.

Проведем вычисления в единицах системы СИ:

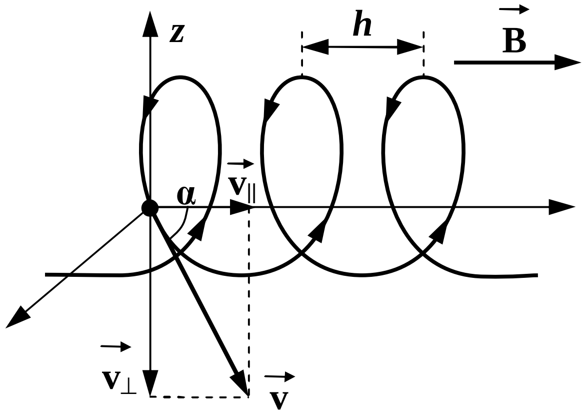
$\nu = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1000\ /\ 2\cdot\pi\cdot9{,}11\cdot10^{-31} = 3{,}52\cdot10^{7}$ ($с^{-1}$).

Пример 3.6

Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 6$ кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30^o$ к направлению поля и движется по винтовой траектории. Индукция магнитного поля $B = 13$ мТл. Найти радиус R, шаг h винтовой траектории, период T обращения электрона, его кинетическую энергию.

Дано: $q = -1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл $U = 6$ кВ = 6000 В $\alpha = 30^o$ $B = 13$ мТл = 0,013 Тл

Найти: R – ? h – ? T – ?



Решение:

В задаче рассматривается явление действия магнитного поля на движущийся в нем заряд.

Разложим скорость электрона, влетающего в магнитное поле, по двум направлениям: вдоль линий поля – $v_{||}$ и перпендикулярно ему – $v_{\perp}$. На основании закона сохранения энергии работа электрического поля $A = |q|U$ переходит в кинетическую энергию электрона $W_к = \dfrac{mv^2}{2}$, поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = |q|U. \quad (1)$$

Из этой формулы определим скорость: $v = \sqrt{\dfrac{2|q|U}{m}}$. Из рисунка видно, что $v_{\perp} = v\sin\alpha$, $v_{||} = v\cos\alpha$. Движение со скоростью, перпендикулярной $\vec{\mathbf{B}}$, было рассмотрено в предыдущей задаче. Формула для радиуса R, полученная в предыдущей задаче (пример 3.5), справедлива и в данном случае, если в ней заменить v на $v_{\perp}$: $R = \dfrac{mv_{\perp}}{|q|B}$. Тогда $R = \dfrac{mv\sin\alpha}{|q|B} = \dfrac{\sin\alpha}{B}\sqrt{\dfrac{2mU}{|q|}}$. Проведем вычисления в единицах системы СИ:

$$R = \frac{0{,}5}{0{,}013}\sqrt{\frac{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot6000}{1{,}6\cdot10^{-19}}} = 10^{-2}\ (м) = 1\ (см).$$

Шаг спирали найдем из соотношений $2\ \pi R = v_{\perp}T$ и $h = v_{||}T$, откуда

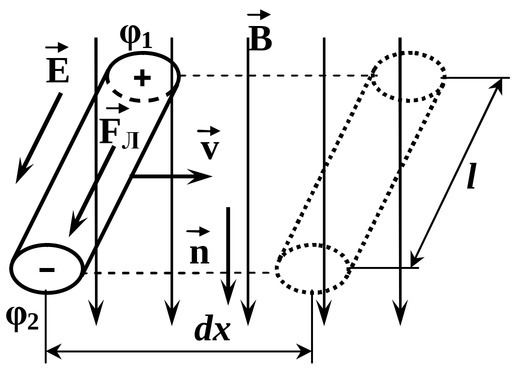
$h = 2\pi R \dfrac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = 2\ \pi R \operatorname{ctg} \alpha$. Проведем вычисления в единицах системы СИ: $h = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}0{,}01{\cdot}\operatorname{ctg} 30^{o} = 0{,}0628 \cdot 1{,}732 = 0{,}109$ (м) = 10,9 (см).

Пример 3.7

Проводник из металла длиной 1,5 м перемещается в магнитном поле индукции 0,2 Тл равномерно со скоростью 3 м/с. Найти ЭДС индукции в проводнике, если линии магнитного поля перпендикулярны длине проводника и направлению его движения.

Дано: $B = 0{,}2$ Тл, $\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$, $\alpha = 0^{o}$, $\mathbf{l} = 1{,}5$ м, v = 3 м/с, $\varphi = 90^{o}$.

Найти: e_i – ?



Решение:

В задаче рассматривается явление электромагнитной индукции.

По закону электромагнитной индукции Фарадея (3.29)

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $d\Phi = d[B{\cdot}S{\cdot}\cos(\widehat{\vec{\mathbf{B}}\ \vec{\mathbf{n}}})]$.

Изменение магнитного потока $d\Phi$ в данном случае происходит за счет изменения площади dS, которую описывает проводник при своем движении. При B = const и $\widehat{\vec{\mathbf{B}}\ \vec{\mathbf{n}}} = 0^{o}$ получим $d\Phi = B\,dS \cos 0^{o} = B\,dS$.

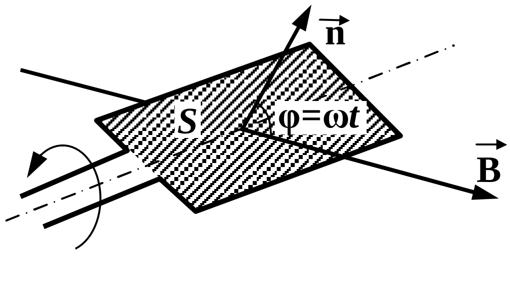
$$|e_i| = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = B\mathbf{l}\frac{dx}{dt} = B\mathbf{l}\mathrm{v}.$$

Численное значение ЭДС (или разности потенциалов на концах проводника) равно

$$e_i = \varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}2{\cdot}1{,}5{\cdot}3 = 0{,}9 \text{ (В)}.$$

Пример 3.8

В однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл) равномерно с частотой $\nu = 10$ с$^{-1}$ вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь S рамки равна 150 см^2. Определить: 1) мгновенное значение ЭДС индукции e_i, соответствующее углу φ поворота рамки, равному 30 º; 2) максимальное значение ЭДС индукции e_{max}; 3) среднее значение ЭДС индукции $< e_i >$, за время, в течение которого поток, пронизывающий рамку, изменится от 0 до максимального значения.



Дано: $B = 0{,}1$ Тл, $\nu = 10$ с$^{-1}$, $N = 1000$, $S = 150$ см^2 = 0,015 м^2, $\varphi = 30^{o}$.

Найти: e_i, e_{max}, $<e_i>$ – ?

Решение:

В задаче расматривается явление электромагнитной индукции.

Мгновенное значение ЭДС индукции e_{i1} в каждом витке определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла:

$$e_{i1} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

В рамке из N витков возникает ЭДС

$$e_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

При вращении рамки (см. рис.), магнитный поток Ф, пронизывающий рамку в момент времени t, определяется соотношением (3.22, $\alpha = \varphi$) $\Phi = BS \cos\varphi = BS \cos \omega t$, где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; ω – круговая (или циклическая) частота.

Подставив в формулу (1) выражение Ф и продифференцировав полученное выражение по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$e_i = NBS\omega \sin \omega t. \qquad (2)$$

Круговая частота ω связана с частотой вращения ν соотношением $\omega = 2\pi\nu$. Подставляя выражение для ω в формулу (2) и заменив ωt на φ, получим

$$e_i = 2\pi\nu NBS \sin\varphi. \qquad (3)$$

Произведем вычисления в единицах системы СИ:

$$e_i = 2\cdot 3{,}14\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 0{,}015\cdot 0{,}5 = \mathbf{47{,}1\ (В)}.$$

Как следует из формулы (3), ЭДС индукции будет максимальна при максимальном значении синуса φ, т. е. при $\sin\varphi = 1$ ($\varphi = 90°$).

Тогда максимальное значение ЭДС индукции можно найти по формуле

$$e_{max} = 2\pi\nu NBS.$$

Произведем вычисления в единицах системы СИ:

$$e_{max} = 2\cdot 3{,}14\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 0{,}015 = \mathbf{94{,}2\ (В)}.$$

Среднее значение ЭДС индукции можно найти по формуле

$$<e_i> = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t}, \text{ или}$$

$$<e_i> = N\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Максимальный и нулевой магнитные потоки определяем по формулам:

$$\Phi_1 = BS\cos 0° = BS \text{ и } \Phi_2 = BS\cos 90° = 0. \qquad (5)$$

Магнитный поток изменяется по закону косинуса, так что от нулевого до максимального значения проходит время, равное четверти периода T/4. Поэтому

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4\nu}. \qquad (6)$$

Подставим формулы (5) и (6) в формулу (4):

$$\langle e_i \rangle = 4\nu NBS.$$

Произведем вычисления в единицах системы СИ:

$$\langle e_i \rangle = 4\cdot10\cdot1000\cdot0{,}1\cdot0{,}015 = 60 \text{ (В)}.$$

Пример 3.9

Плоский квадратный контур со стороной a = 10 см, по которому течет ток силой I = 100 А, свободно установился в однородном магнитном поле (B = 1 Тл). Определить работу A, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол: 1) $\varphi_1 = 90^\circ$; 2) $\varphi_2 = 3^\circ$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

Дано: I = 100 А, a = 10 см = 0,1 м, B = 1 Тл.

1) $\varphi = 90°$;

2) $\varphi = 3°$.

Найти: A_1 – ? A_2 – ?

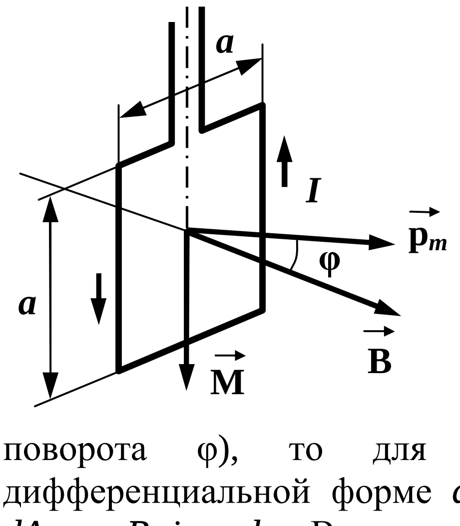
Решение:

В задаче рассматривается явление силового действия магнитного поля на проводник (контур) с током и совершения работы при повороте рамки с током в магнитном поле.

Как известно, на контур с током в магнитном поле действует момент силы (3.16, $\alpha = \varphi$)

$$M = p_m B \sin\varphi, \quad (1)$$

где $p_m = IS = Ia^2$ – магнитный момент контура; В – магнитная индукция; φ – угол между векторами $\vec{\mathbf{p}}_m$ (направлен по нормали к контуру) и $\vec{\mathbf{B}}$.



По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле. При этом момент сил равен 0 (M = 0), а значит, $\varphi = 0$, т. е. векторы $\vec{\mathbf{p}}_m$ и $\vec{\mathbf{B}}$ сонаправлены. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил будет стремиться возвратить контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешних сил. Так как момент сил переменный (зависит от угла поворота φ), то для подсчета применим формулу работы в дифференциальной форме $dA = M(\varphi)\, d\varphi$. Учитывая формулу (1), получаем $dA = p_m B \sin\varphi\, d\varphi$. Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте на конечный угол:

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi} \sin\varphi d\varphi. \quad (2)$$

Работа при повороте на угол $\varphi_1 = 90° = \dfrac{\pi}{2}$:

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = IBa^2 \left|(-\cos\varphi)\right|_0^{\pi/2} = IBa^2 = 100 \cdot 1 \cdot 0{,}1^2 = 1 \text{ (Дж)}.$$

Работа при повороте на угол $\varphi_2 = 3°$. В этом случае, учитывая, что угол φ_2 мал, заменим в выражении (2) $\sin\varphi \approx \varphi$ (в радианах):

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} IBa^2 \varphi_2^2 = 0{,}5 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 0{,}1^2 \cdot (3 \cdot \pi/180)^2 = 1{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)} =$$

1,37 (мДж), где $\varphi_2 = 3° = 3\pi/180$ (радиан).

Задачу можно решить и другим способом. Работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока через контур (3.28):

$$A = -I\,\Delta\Phi = I\,(\Phi_1 - \Phi_2),$$

где Φ_1 – магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения, когда векторы $\vec{\mathbf{p}}_m$ и $\vec{\mathbf{B}}$ совпадают по направлению ($\varphi = 0$); Φ_2 – то же после перемещения на угол φ. Если $\varphi_1 = 90°$, то $\Phi_1 = BS\cos 0° = BS$, $\Phi_2 = BS\cos 90° = 0$. Тогда $A_1 = IBS = IBa^2 = 1$ (Дж), что совпадает с ранее полученным выражением.

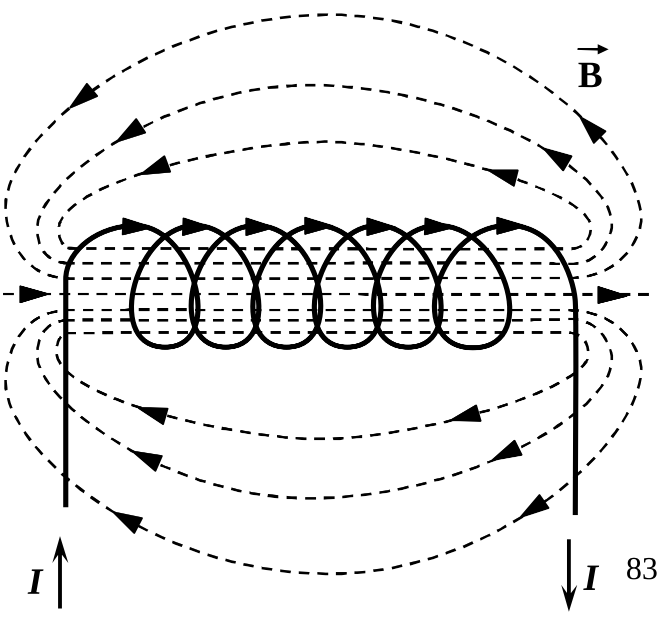
Если $\varphi = \varphi_2 = 3°$, то $\Phi_1 = BS$, $\Phi_2 = BS\cos 3°$. Тогда $A_2 = IBS\,(1 - \cos 3°) = IBa^2\,(1 - \cos 3°) = 1{,}37$ (мДж), что совпадает с ранее полученной величиной.

Пример 3.10

Длинный соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N = 1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I = 4$ А магнитный поток $\Phi = 6$ мкВб. Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида, объемную плотность энергии магнитного поля w, если длина соленоида $\mathbf{l} = 1$ м.

Дано: $N = 1200$, $I = 4$ А, $\Phi = 6$ мкВб $= 6 \cdot 10^{-6}$ Вб, $\mathbf{l} = 1$ м.

Найти: L – ? W – ? w – ?



Решение:

В задаче рассматривается явление создания магнитного поля соленоидом с током.

Индуктивность L связана с потокосцеплением Ψ и силой тока I соотношением (3.30)

$$\Psi = LI. \qquad (1)$$

Потокосцепление, в свою очередь, может быть определено через поток Φ и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу):

$$\Psi = N\Phi. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) находим индуктивность соленоида:

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \qquad (3)$$

Энергия магнитного поля соленоида:

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

Выразив L согласно уравнению (3), получим энергию магнитного поля:

$$W = \frac{1}{2}N\Phi I. \qquad (4)$$

Подставим значения физических величин в единицах СИ в формулы (3) и (4) и вычислим значения L и W:

$L = (1200 \cdot 6 \cdot 10^{-6})/4 = 0{,}0018$ (Гн) = **1,8 (мГн)**.

$W = (1200 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4)/2 = 0{,}0144$ (Дж) = **14,4 (мДж)**.

Энергию магнитного поля можно найти и другим способом:

Запишем энергию магнитного поля как (3.33), $\mu = 1$:

$$W = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 V = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 S\mathbf{l}, \qquad (5)$$

где V, $\mathbf{l}$ – объем и длина соленоида, S – площадь витка.

Напряженность магнитного поля длинного соленоида ($d \ll \mathbf{l}$)

$$H = nI. \qquad (6)$$

Магнитный поток внутри соленоида равен $\Phi = BS\cos\alpha$. В длинном соленоиде $\alpha = 0$, поэтому $\cos\alpha = 1$. Тогда $\Phi = BS\cos 0^\circ = BS = \mu\mu_0 HS = \mu_0 nIS$ ($\mu = 1$ для немагнитного материала).

Из этой формулы выразим площадь S:

$$S = \frac{\Phi}{\mu_0 nI}. \qquad (7)$$

Подставим формулы (6) и (7) в формулу (5):

$$W = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \frac{\Phi}{\mu_0 nI}\mathbf{l} = \frac{1}{2} nI\Phi\mathbf{l}.$$

Учитывая, что $n = N / \mathbf{l}$, получим формулу для вычисления энергии поля соленоида:

$$W = \frac{1}{2}\frac{N}{\mathbf{l}} I\Phi\mathbf{l} = \frac{NI\Phi}{2}.$$

Объёмная плотность энергии магнитного поля равна

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \mu_0 n^2 I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{\mathbf{l}^2} I^2.$$

Вычислим в единицах СИ:

$$w = \frac{1}{2} 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1200^2}{1^2} 4^2 = 32 \cdot 3{,}14 \cdot 144 \cdot 10^{-3} = \mathbf{14{,}5\ (Дж/м^3)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

201. Заряды 40 и –10 нКл расположены на расстоянии 10 см друг от друга. Какой надо взять третий заряд и где следует его поместить, чтобы равнодействующая сил, действующая на него со стороны двух других зарядов, была бы равна нулю?

202. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см находятся два положительных заряда и один отрицательный заряд величиной 7 нКл каждый. Определить напряженность электрического поля в центре треугольника.

203. На нитях, закрепленных в одной точке, подвешены два одинаковых шарика. При сообщении шарикам одинаковых одноименных зарядов 2 мкКл нити разошлись, образовав угол 60°. Какой заряд надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись, образовав угол 90°?

204. Три одинаковых заряда величиной 9 нКл каждый находятся в вершинах равностороннего треугольника. На каждый заряд действует сила 10 мН. Найти длину стороны треугольника.

205. В вершинах квадрата со стороной 10 см расположены три отрицательных и один положительный заряд величиной $8{\cdot}10^{-9}$ Кл каждый. Определить напряжённость электрического поля в центре квадрата.

206. Заряды $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = -1$ мкКл находятся на расстоянии $d = 10$ см. Определить напряженность E и потенциал φ поля в точке, удаленной на расстояние $r = 10$ см от первого заряда и лежащей на линии, проходящей через первый заряд, перпендикулярно направлению от q_1 к q_2.

207. Два шарика одинакового радиуса и одинаковой массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд q нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной 100 мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса $l = 10$ см; масса каждого шарика $m = 5$ г.

208. Шарик массой 0,25 г, висящий на нити, помещен в горизонтальное однородное электростатическое поле напряженностью 125 В/м. При сообщении шарику заряда он отклонился так, что нить составила угол 30° с вертикалью. Определить заряд шарика.

209. В двух смежных вершинах квадрата со стороной 20 см находятся заряды $q_1 = 10^{-7}$ Кл и $q_2 = -2{\cdot}10^{-7}$ Кл. Определите напряженность и потенциал в центре квадрата.

210. Два точечных заряда $q_1 = 5$ нКл и $q_2 = –4$ нКл расположены на расстоянии $r = 5$ см. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстояниях $a = 3$ см от положительного заряда и $b = 4$ см от отрицательного заряда.

211. Две бесконечные пластины с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = 4\cdot10^{-9}$ Кл/м^2 и $\sigma_2 = 2\cdot10^{-9}$ Кл/м^2 расположены под прямым углом друг к другу. Определить напряженность создаваемого ими электрического поля.

212. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью заряда 10 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии 20 см от его конца находится точечный заряд $q = 10^{-8}$ Кл. Второй конец стержня уходит в бесконечность. Определить силу, с которой стержень действует на заряд.

213. Определить полный заряд, который равномерно распределен по тонкому стержню длиной 40 см, если создаваемая им напряженность электрического поля в точке, лежащей на продолжении стержня на расстоянии 20 см от ближайшего конца, равна 60 кВ/м.

214. Нить, на которой подвешен заряженный шарик с массой в 1 г и зарядом 1 нКл, отклоняется от вертикали на угол 30° в электрическом поле вертикальной заряженной бесконечной плоскости. Определить поверхностную плотность заряда этой плоскости.

215. Тонкое полукольцо радиуса $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $q = 10^{-6}$ Кл/м. В центре кривизны полукольца находится точечный заряд $q_0 = 2\cdot10^{-8}$ Кл. Найти силу взаимодействия точечного заряда и заряженного кольца.

216. Электрическое поле образовано бесконечно длинной заряженной нитью, линейная плотность заряда которой $\tau = 20$ мкКл/м. Определить разность потенциалов и двух точек поля, находящихся от нити на расстоянии $r_1 = 8$ см и $r_2 = 12$ см.

217. Заряд 10 мкКл равномерно распределен по дуге окружности с углом раствора 60°. Определить напряженность электрического поля в центре кривизны дуги, радиус которой равен 10 см.

218. Две длинные прямые параллельные нити находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Нити заряжены равномерно с линейными плотностями заряда $\tau_1 = –10^{-6}$ Кл/м и $\tau_2 = 2\cdot10^{-6}$ Кл/м. Определить напряженность электрического поля в точке, удаленной на 6 см от одной и на 8 см от другой нити.

219. Поле образовано бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 40$ нКл/м^2. Определить разность потенциалов U двух точек поля, находящихся от плоскости на расстоянии на $r_1 = 15$ см и $r_2 = 20$ см.

220. Определить напряженность электрического поля в точке пересечения осей двух равномерно заряженных длинных стержней, расположенных перпендикулярно друг к другу. Точка пересечения их осей находится на расстояниях 10 см и 15 см от ближайших концов стержня. Другие концы стержня уходят в бесконечность. Линейная плотность заряда обоих стержней равна 10^{-6} Кл/м.

221. Шарик массой $m = 40$ мг, имеющий положительный заряд $q = 1$ нКл, движется со скоростью v = 10 см/с. На какое расстояние r может приблизиться шарик к положительному точечному заряду $q_0 = 2{,}5$ нКл?

222. На расстоянии $r_1 = 4$ см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $6 \cdot 10^{-10}$ Кл. Под действием поля заряд перемещается до расстояния $r_2 = 2$ см, при этом совершается работа $5 \cdot 10^{-6}$ Дж. Найти линейную плотность заряда.

223. Чтобы увеличить скорость от $2 \cdot 10^4$ до $7 \cdot 10^4$ м/с, заряженная частица должна пройти разность потенциалов 2,3 В. Какую разность потенциалов должна пройти эта частица, чтобы скорость увеличилась от $7 \cdot 10^4$ до $8 \cdot 10^4$ м/с?

224. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии $r_1 = 2$ см от нити, до точки $r_2 = 4$ см, заряженная частица изменила свою скорость от $V_1 = 2 \cdot 10^5$ м/с до $V_2 = 8 \cdot 10^5$ м/с. Определить скорость частицы в точке, находящейся на расстоянии $r_3 = 6$ см от нити.

225. Какая совершается работа при перенесении точечного заряда $2 \cdot 10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 1 см от заряженной бесконечно протяженной плоскости. Поверхностная плотность заряда, распределенного по плоскости равна $\sigma = 10^{-9}$ Кл/см^2.

226. В электроннолучевой трубке поток электронов ускоряется полем с разностью потенциалов 5 кВ и попадает в пространство между вертикально отклоняющимися пластинами длиной 5 см, напряженность поля между которыми 40 кВ/м. Найти вертикальное смещение луча на выходе из пространства между пластинами.

227. Шарик с массой m = 1 г и зарядом q = 10 нКл перемещается из точки 1, потенциал которой φ_1 = 600 В, в точку 2, потенциал которой φ_2 = 0. Найти его скорость в точке 1, если в точке 2 она стала равной V_2 = 20 см/с.

228. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью с линейной плотностью заряда τ = 0,2 мкКл/м. Какую скорость V получит электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния r_1 = 1 см до расстояния r_2 = 0,5 см?

229. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобрел скорость 10^5 м/с. Расстояние между пластинами d = 8 мм. Найти разность потенциалов U между пластинами и поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

230. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд q = 6 мкКл. Заряд перемещается по линии напряженности поля на расстояние Δr = 2 см; при этом совершается работа A = 5 мкДж. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости.

231. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S = 0,01м^2, расстояние между ними d = 5 мм. Какая разность потенциалов U была приложена к пластинам конденсатора, если известно, что при заряде конденсатора выделилось количества тепла Q = 4 мДж?

232. Если плоский воздушный конденсатор, пластины которого расположены вертикально, погрузить на треть в жидкий диэлектрик с ε = 2, то его емкость будет равна 50 мкФ. Чему будет равна емкость конденсатора, если его погрузить в жидкий диэлектрик на половину?

233. Плоский воздушный конденсатор, имеющий емкость 4 мкФ, заряжен до разности потенциалов 50 В и отключен от источника. Какую работу надо совершить, чтобы в полтора раза увеличить расстояние между обкладками?

234. Конденсатор емкостью C_1 зарядили до напряжения 500 В. При параллельном подключении этого конденсатора к незаряженному конденсатору емкостью C_2 = 4 мкФ вольтметр показал 100 В. Найти емкость C_1.

235. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинами d = 4 мм погружён до половины в керосин. Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon_к$ = 2 . Насколько необходимо раздвинуть пластины конденсатора, чтобы его ёмкость осталась прежней?

236. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику тока с напряжением 10 В. Каково будет напряжение на первом конденсаторе, если между его обкладками поместить диэлектрическую пластинку ($\varepsilon = 5$), толщина которой равна одной трети расстояния между обкладками.

237. Рассчитать энергию поля заряженного конденсатора заполненного диэлектриком ($\varepsilon = 5$). Площадь каждой пластины конденсатора 100 см^2, расстояние между пластинами 5 см, а напряженность поля 20 кВ/м. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

238. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов 100 В и отключен от источника. Для увеличения расстояния между обкладками в 3 раза была совершена работа 50 мДж. Найти первоначальную емкость конденсатора.

239. Как изменится по отношению к первоначальной емкости емкость плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками поместить диэлектрическую пластинку ($\varepsilon = 8$), толщина которой равна одной четвертой расстояния между обкладками.

240. Какое количество электрической энергии перейдет в теплоту при соединении одноименно заряженных пластин конденсаторов 2 мкФ и 0,5 мкФ, заряженных до напряжений 100 В и 50 В соответственно?

241. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 2$ А до $I = 6$ А в течение времени $\tau = 5$ с. Определите заряд, прошедший по проводнику.

242. Определите напряженность электрического поля в алюминиевом проводнике объемом $V = 10$ см^3, если при прохождении по нему постоянного тока за время $t = 5$ мин выделилось количество теплоты $Q = 2{,}3$ кДж. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм·м.

243. Определить ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r источника тока, если во внешней цепи при силе тока 4 А развивается мощность 10 Вт, а при силе тока 2 А мощность 8 Вт.

244. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора, если при увеличении внешнего сопротивления с 5 Ом до 10 Ом КПД схемы увеличился в 1,5 раза.

245. К источнику тока подключен реостат. При сопротивлении реостата 25 Ом и 16 Ом получается одинаковая полезная мощность 25 Вт. Найти ЭДС источника тока.

246. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 120$ Ом равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до $I_{max} = 5$ А за время $\tau = 5$ с. Определите выделившееся за это время в проводнике количество теплоты.

247. ЭДС батареи равна 20 В. Сопротивление внешней цепи равно 2 Ом, сила тока 4 А. Найти КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления КПД будет равен 99%?

248. ЭДС батареи аккумуляторов $\mathcal{E} = 12$ В, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

249. Определить ток короткого замыкания источника ЭДС, если при внешнем сопротивлении $R_1 = 50$ Ом ток в цепи $I_1 = 0,2$ А, а при этом $R_2 = 110$ Ом – $I_2 = 0,1$ А.

250. Плотность электрического тока в медном проводе равна 10 А/см^2. Определить удельную тепловую мощность тока, если удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм·м.

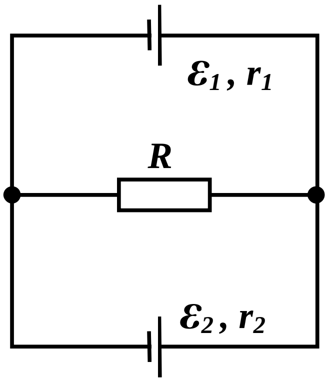


Рис. 1

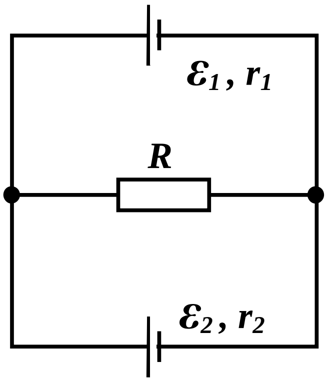


Рис. 2

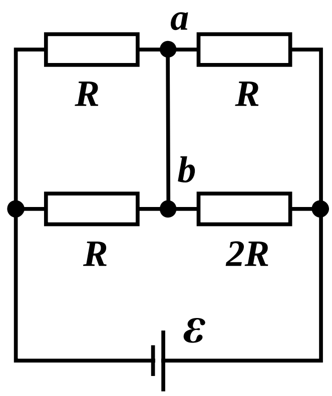


Рис. 3

251. Два элемента с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление R (см. рис. 1). Через элемент с ЭДС $\mathcal{E}_1$ течет ток $I_1 = 1$ А. Найти сопротивление R и ток I_2, текущий через элемент с ЭДС $\mathcal{E}_2$. Определить силу тока через сопротивление R.

252. Два элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 4$ В и $\mathcal{E}_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 0,5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R = 5$ Ом (см. рис. 1). Определить силу тока в каждом элементе и в сопротивлении R.

253. Два элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 4$ В, $\mathcal{E}_2 = 6$ В соединены параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление R (см. рис. 1). Внутренние сопротивле-

ния элементов равны соответственно $r_1 = 0{,}5$ Ом, $r_2 = 1$ Ом. Чему равно сопротивление резистора R и сила тока в первом элементе, если сила тока во втором элементе равна $I_2 = 1$ А?

254. Два источника с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 3$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1{,}5$ Ом, $r_2 = 2$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление R (см. рис. 2). Определить силу тока через сопротивление R.

255. Два элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 3$ В, $\mathcal{E}_2 = 1{,}5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 =1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление R (см. рис. 2). Определить силу тока во всех ветвях, если резистор имеет сопротивлении $R = 5$ Ом.

256. Определить силу тока в перемычке ab в схеме, представленной на рис. 3. Считать сопротивление перемычки равным нулю, а сопротивление резисторов $R = 5$ Ом. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводящих проводов пренебречь.

257. Генератор с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}2$ Ом заряжает батарею аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}6$ Ом. Параллельно батарее включена лампочка сопротивлением $R = 3$ Ом. Определить токи в батарее и лампочке.

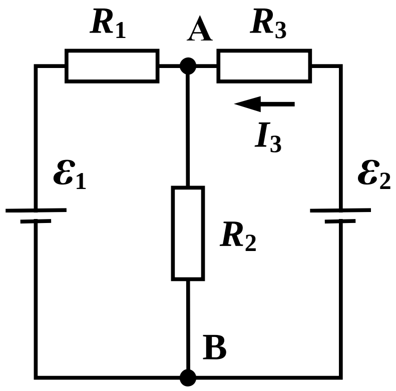


Рис. 4

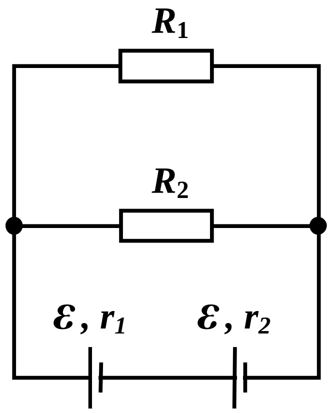


Рис. 5

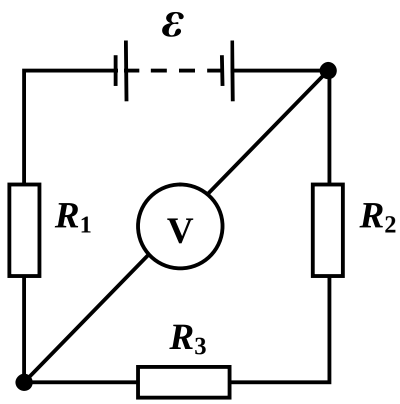


Рис. 6

258. Определить силу тока I_3 в резисторе R_3 и напряжение на концах резистора, если ЭДС $\mathcal{E}_1 = 3$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 4$ Ом. Внутренними сопротивлениями источника пренебречь (см. рис. 4).

259. Определить силу токов, протекающих через резисторы R_1 и R_2, (см. рис. 5) если $\mathcal{E}_1 = 4$ В, $\mathcal{E}_2 = 5$ В, $r_1 = 0{,}4$ Ом, $r_2 = 0{,}6$ Ом, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом.

260. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 50$ В, внутреннее сопротивление $r = 20$ Ом. Сопротивления $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 180$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, сопротивление

вольтметра 500 Ом (см. рис. 6). Какую разность потенциалов показывает вольтметр?

261. По двум длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи силой I_1 = 10 А и I_2 = 15 А. Расстояние между проводами a = 10 см. Определить напряженность H магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на r_1 = 8 см и от второго на r_2 = 6 см.

262. По двум длинным параллельным проводам текут в противоположных направлениях токи силой I_1 = 10 А и I_2 = 15 А. Расстояние между проводами a = 10 см. Определить напряженность H магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на r_1 = 15 см и от второго на r_2 = 10 см.

263. По двум длинным параллельным проводам, расстояние между которыми d = 5 см, текут одинаковые токи I = 10 А. Определить индукцию В и напряженность Н магнитного поля в точке, удаленной от каждого провода на расстояние r = 5 см, если токи текут в одинаковом направлении.

264. По двум длинным параллельным проводам, расстояние между которыми d = 5 см, текут одинаковые токи I = 10 А. Определить индукцию В и напряженность Н магнитного поля в точке, удаленной от каждого провода на расстояние r = 5 см, если токи текут в противоположных направлениях.

265. По контуру в виде равностороннего треугольника течет ток силой I = 50 А. Сторона треугольника a = 20 см. Определить магнитную индукцию В в точке пересечения высот.

266. По проводнику, согнутому в виде прямоугольника со сторонами a = 8 см и b = 12 см, течет ток силой I = 50 А. Определить напряженность Н и индукцию В магнитного поля в точке пересечения диагоналей прямоугольника.

267. По тонкому проводнику, изогнутому в виде правильного шестиугольника со стороной a = 10 см, идет ток силой I = 20 А. Определить магнитную индукцию B в центре шестиугольника.

268. Из проволоки длиной $\mathbf{l}$ = 1 м сделана квадратная рамка. По рамке течет ток I = 10 А. Найти напряженность H магнитного поля в центре рамки.

269. По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, идет ток I = 2 А. При этом в центре рамки образуется магнитное поле напряженностью H = 33 А/м. Найти длину $\mathbf{l}$ проволоки, из которой сделана рамка.

270. Бесконечно длинный провод образует круговой виток, касательный

к проводу. По проводу идет ток $I = 5$ А. Найти напряжённость магнитного поля в центре витка, если его радиус $R = 8$ см.

Указание: условно разбить проводник на два проводника – бесконечно длинный и круговой. Результирующее поле H – сумма поля H_1 бесконечно длинного проводника на расстоянии R от него и поля H_2 в центре кругового проводника радиуса R.

271. Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I_1 = 10$ А, $I_2 = 20$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. На расстоянии $r_1 = 10$ см от одного проводника и на расстоянии $r_2 = 10$ см от другого помещен третий проводник А, по которому течет ток противоположного направления силой $I_3 = 30$ А. Определить силу, действующую на третий проводник, если его длина $\mathbf{l} = 20$ м.

272. Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в противоположном направлении электрические токи силой $I_1 = 30$ А, $I_2 = 20$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. На расстоянии $r_1 = 4$ см от одного проводника и на расстоянии $r_2 = 6$ см от другого помещен третий проводник А, по которому течет ток того же направления, что и в проводнике D, силой $I_3 = 40$ А. Определить силу, действующую на третий проводник, если его длина $\mathbf{l} = 15$ м.

273. Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в противоположном направлении электрические токи силой $I_1 = 20$ А, $I_2 = 30$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. На расстоянии $r_1 = 6$ см от одного проводника и на расстоянии $r_2 = 8$ см от другого помещен третий проводник А, по которому течет ток того же направления, что и в проводнике С, силой $I_3 = 50$ А. Определить силу, действующую на третий проводник, если его длина $\mathbf{l} = 10$ м.

274. Два иона с одинаковыми зарядами, пройдя одну и ту же ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Один ион, масса которого $m_1 = 12$ а. е. м., описал дугу окружности радиусом $R_1 = 2$ см. Определить массу m_2 (в а. е. м.) другого иона, который описал дугу окружности радиусом $R_2 = 2{,}31$ см.

275. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 1$ кВ, влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Индукция магнитного поля В = 1,19 мТл. Найти радиус R окружности, по которой движется электрон.

276. Однозарядные ионы изотопов калия ($q = |q_e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл) с относительными атомными массами 39 и 41 ускоряются разностью

потенциалов $U = 300$ В; затем они попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению их движения. Индукция магнитного поля $B = 0{,}08$ Тл. Найти радиусы кривизны R_1 и R_2 траекторий этих ионов.

277. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле ($m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $q_p = |q_e| = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл). Во сколько раз радиус кривизны R_1, траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона?

278. Электрон движется в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 10$ мТл, по винтовой линии радиуса $R = 1$ см и шагом винта $h = 6$ см. Определить период T и скорость v электрона.

279. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл движется α-частица ($m_\alpha = 6{,}64\cdot10^{-27}$ кг, $|q_\alpha| = 2|q_e| = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл). Траектория её движения представляет собой винтовую линию радиусом $R = 1$ см и шагом $h = 6$ см. Определить кинетическую энергию $W_к$ α–частицы.

280. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл по винтовой линии, радиуса которой $R = 1{,}5$ см и шаг $h = 10$ см. Определить период T обращения электрона и его скорость v.

281. Проводник длиной $l = 1$ м движется со скоростью v = 5 м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определить магнитную индукцию B если на концах проводника возникает разность потенциалов $U = 0{,}02$ В.

282. Скорость самолета с реактивным двигателем равна 950 км/ч. Найти значение вертикальной составляющей напряженности магнитного поля Земли, если на концах крыльев самолета возникает при этом движении разность потенциалов, равная 165 мВ. Размах крыльев самолета 12,5 м.

283. Рамка площадью $S = 50$ см, содержащая $N = 100$ витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле ($B = 40$ мТл). Определить максимальную ЭДС e_i, индукции, если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линии индукции, а рамка вращается с частотой $n = 960$ об/мин.

284. Рамка площадью $S = 100$ см^2 равномерно вращается с частотой $\nu = 5$ с$^{-1}$ относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0{,}5$ Тл). Определить среднее значение ЭДС индукции $\langle e_i \rangle$ за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения.

285. Катушка диаметром $D = 10$ см, состоящая из $N = 500$ витков проволоки, находится в магнитном поле. Найти среднюю ЭДС индукции $<e_i>$, возникающую в этой катушке, если индукция магнитного поля увеличивается в течение времени t = 0.1 с от 0 до 2 Тл.

286. Круговой проволочный виток площадью $S = 0{,}01$ м^2 находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 1$ Тл. Плоскость витка перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти среднюю ЭДС индукции $< e_i >$, возникающую в витке при выключении поля в течение времени t = 10 мс.

287. В однородном магнитном поле, индукция которого равна $B = 0{,}1$ Тл, равномерно вращается катушка, состоящая из $N = 100$ витков проволоки. Частота вращения катушки $\nu = 5$ с$^{-1}$; площадь поперечного сечения катушки S = 0,01 м^2. Ось вращения перпендикулярна к оси катушки и направлению магнитного поля. Найти максимальную ЭДС индукции e_{max} во вращающейся катушке.

288. В однородном магнитном поле, индукция которого равна $B = 0{,}8$ Тл, равномерно вращается рамка с угловой скоростью $\omega = 15$ с$^{-1}$. Площадь рамки $S = 150$ см^2. Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет угол $\alpha = 30^o$ с направлением магнитного поля. Найти максимальную ЭДС индукции ε_{max} во вращающейся рамке.

289. В однородном магнитном поле, индукция которого равна $B = 0{,}1$ Тл, вращается катушка состоящая из $N = 200$ витков. Ось вращения катушки перпендикулярна к её оси и направлению магнитного поля. Период обращения катушки $T = 0{,}2$; площадь поперечного сечения S = 4 см^2. Найти максимальную ЭДС индукции ε_{max} во вращающейся катушке.

290. Соленоид содержит $N = 800$ витков. Сечение сердечника (из немагнитного материала) S = 10 см^2. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B = 8$ мТл. Определить среднее значение ЭДС, $< e_i >$ самоиндукции, которая возникает на зажимах соленоида, если сила тока уменьшается практически до нуля за время Dt = 0,8 мс.

291. Виток радиусом $R = 20$ см, по которому течет ток силой $I = 5$ А, свободно установился в однородном магнитном поле напряженностью $H = 10^3$ А/м. Виток повернули относительно диаметра на угол $\varphi = 30°$. Определить совершенную работу A.

292. По проводнику, согнутому в виде квадрата со стороной a = 10 см, течет ток силой $I = 20$ А. Плоскость квадрата перпендикулярна магнитным

силовым линиям поля. Определить работу A, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить проводник за пределы поля. Магнитная индукция B = 0,1 Тл. Поле считать однородным.

293. Плоский контур с током силой I = 5 А свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией B = 0.4 Тл. Площадь контура S = 200 см^2. Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол α = 40°. Определить совершенную при этом работу A.

294. Виток, в котором поддерживается максимальная сила тока I = 60 А, свободно установился в однородном магнитном поле (B = 20 мТл). Диаметр витка d = 10 см. Какую работу A нужно совершить для того, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол $\alpha = \pi/3$?

295. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью S = 100 см^2. Поддерживая в контуре постоянную силу токи I = 50 А, его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить индукцию B магнитного поля, если при перемещении контура была совершена работа A = 0,4 Дж.

296. Круговой контур помещен в однородное магнитное поле так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля. Напряженность магнитного поля H = 150 кА/м. По контуру течет ток I = 2 А. Радиус контура R = 2 см. Какую работу А надо совершить, чтобы повернуть контур на угол φ = 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром контура?

297. В соленоиде сечением S = 5 см^2 создан магнитный поток Ф = 20 мкВб. Определить объемную плотность w энергии магнитного поля соленоида. Сердечник отсутствует. Магнитное поле во всем объёме соленоида считать однородным.

298. Магнитный поток Ф в соленоиде, содержащем N = 1000 витков равен 0,2 мВб. Определить, энергию W магнитного поля соленоида, если сила тока, протекающего по виткам соленоида, I = 1 А. Сердечник отсутствует. Магнитное поле во всем объеме соленоида считать однородным.

299. Обмотка соленоида содержит n = 20 витков на каждый сантиметр длины. При какой силе тока I объемная плотность энергии магнитного поля будет w = 0,1 Дж/м^3? Сердечник выполнен из немагнитного материала, и магнитное поле во всем объеме однородно.

300. По проводнику, изогнутому в виде кольца радиусом R = 20 см, содержащему N = 500 витков, течет ток силой I = 1 А. Определить объемную плотность w энергии магнитного поля в центре кольца.

Приложение

Таблица 1

Основные физические постоянные

Элементарный заряд	$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя α-частицы	$m_\alpha = 6{,}64\cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная в законе Кулона	$k = \dfrac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \dfrac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м

Таблица 2

Удельное сопротивление материалов ($\rho \cdot 10^8$, Ом·м)

Вольфрам	5,5	Нихром	110	Железо	9,8
Медь	1,7	Никелин	40	Серебро	1,6

Таблица 3

Диэлектрическая проницаемость веществ

Вода	81	Парафин	2,0	Слюда	6,0
Стекло	7,0	Трансформаторное масло	2,2		

Физика
Часть 2
Электричество и магнетизм

Составители: Л. П. Ляхова, Л. П. Осуховская, И. А. Терлецкий
Корректор Л. В. Яриш
Техн. редактор Н. М. Белохонова

Подписано в печать Формат 60×84/16
Усл. печю лю 5,82 Уч.-изд. л. 5,34
Тираж 100 Заказ

Издательство ДВГТУ, 690950, Владивосток, Пушкинская, 10
Типография издательства ДВГТУ, 690950, Владивосток, Пушкинская, 10