Примеры решения задач

Пример 6. Один конец тонкого однородного стержня длиной ℓ жестко закреплен на поверхности однородного шара так, что центры масс стержня и шара, а также точка крепления находятся на одной прямой. Массы шара и стержня равны, а радиус шара в 4 раза меньше длины стержня. Определить период малых колебаний этой системы относительно горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на четверть длины стержня от его свободного конца.

Дано:

ℓ

$m_1 = m_2$

$R = \dfrac{\ell}{4}$

$\ell_1 = \dfrac{\ell}{4}$

Решение:

Система «шар+стержень» представляет собой физический маятник, период малых колебаний которого определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,\ell_C}}, \qquad (1)$$

где I – момент инерции системы относительно оси подвеса, проходящей через точку подвеса т. O перпендикулярно стержню (Рис. 36), m – масса системы, ℓ_C – расстояние от центра тяжести системы до оси подвеса.

$T - ?$

Масса системы

$$m = m_1 + m_2 = 2m_1. \qquad (2)$$

Момент инерции I системы относительно оси подвеса равен сумме моментов инерций стержня I_1 и шара I_2 относительно этой оси:

$$I = I_1 + I_2. \qquad (3)$$

Для нахождения I_1 и I_2 воспользуемся теоремой Штейнера: $I_1 = I_{C1} + m_1 a_1^2$, (4)

$$I_2 = I_{C2} + m_2 a_2^2, \qquad (5)$$

где $I_{C1} = \dfrac{m_1 \ell^2}{12}$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс (т. C_1)

перпендикулярно стержню (Рис. 36);

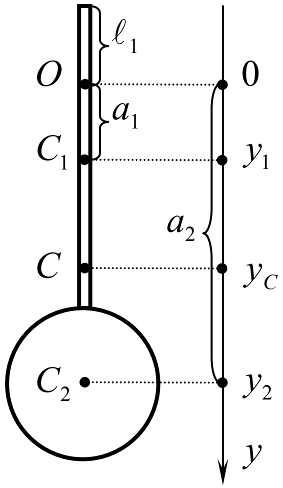

Рис. 36

$a_1 = \frac{\ell}{2} - \ell_1 = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{4}$ – расстояние между осью подвеса и параллельной ей осью,

проходящей через т. C_1;

$I_{C2} = \frac{2m_2R^2}{5}$ – момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр масс (т. C_2);

$a_2 = R + \frac{3\ell}{4} = \frac{\ell}{4} + \frac{3\ell}{4} = \ell$ – расстояние между осью подвеса и параллельной ей осью, проходящей через т. C_2 (по условию $R = \frac{\ell}{4}$). С учетом этого и равенства масс стержня и шара $m_1 = m_2$ выражения (4) и (5) принимают вид

$$I_1 = \frac{m_1\ell^2}{12} + \frac{m_1\ell^2}{16} = \frac{7m_1\ell^2}{48} \quad \text{и} \qquad (6)$$

$$I_2 = \frac{2m_2R^2}{5} + m_2\ell^2 = \frac{2m_2\ell^2}{5\cdot 16} + m_2\ell^2 = \frac{41m_2\ell^2}{40} = \frac{41m_1\ell^2}{40}. \qquad (7)$$

Подставив (6) и (7) в (3), находим момент инерции системы относительно оси подвеса:

$$I = \frac{7m_1\ell^2}{48} + \frac{41m_1\ell^2}{40} = \frac{281m_1\ell^2}{240}. \qquad (8)$$

Так как центр тяжести и центр масс системы совпадают, то расстояние a_C от центра тяжести системы до оси подвеса равно координате y_C центра масс системы. Согласно определению центра масс системы:

$$\ell_C = y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 a_1 + m_1 a_2}{2m_1} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\frac{\ell}{4} + \ell}{2} = \frac{5\ell}{8}. \qquad (9)$$

Период малых колебаний системы получим, подставив выражения (2), (8) и (9) в формулу (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{281 m_1 \ell^2 \cdot 8}{240 \cdot 2m_1 \cdot g \cdot 5\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{281\ell}{300g}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{281\ell}{300g}}$.

Пример 7. Частица массой 10 г совершает колебания вдоль оси *Ox* по закону $x(t) = 0{,}2\cos\left(\frac{5\pi}{6}t\right)$ (м). Определить период колебаний частицы и энергию ее колебаний. Найти в момент времени 0,4 с проекцию вектора скорости и проекцию упругой силы.

Дано:

m = 10 г = 10^{-2} кг

$x(t) = 0{,}2\cos\left(\frac{5\pi}{6}t\right)$ (м)

t_1= 0,4 с

---

1) T – ?

2) W – ?

3) $\upsilon_x(t_1)$ – ?

Решение:

Закон движения частицы, совершающей гармонические колебания вдоль оси *Ox*, имеет вид

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0)$.

Сравнивая этого уравнение с заданным законом движения, получаем, что амплитуда смещения равна

A= 0,2 м,

собственная циклическая частота колебаний составляет $\omega_0 = \frac{5\pi}{6}$ рад/с,

4) $F_x(t_1)$ – ?

а начальная фаза колебаний $\alpha_0 = 0$.

1) Период колебаний T найдем из его связи с собственной циклической частотой ω_0:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi \cdot 6}{5\pi} = 2{,}4 \text{ (с).}$$

2) Энергия колебаний W частицы равна максимальному значению потенциальной энергии $W_{\max}^{p}$:

$$W = W_{\max}^{p} = \frac{k\,A^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости.

Коэффициент упругости k, масса частицы m и собственная циклическая частота связаны соотношением

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

откуда $k = m\omega_0^2$, тогда энергия колебаний W частицы равна

$$W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

Подставим числовые значения и вычислим:

$$W = \frac{10^{-2} \cdot 25 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}04}{2 \cdot 36} \approx 1{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)} = 1{,}37 \text{ (мДж)}.$$

3) Зависимость $\upsilon_x(t)$ проекции на ось Ox скорости частицы от времени найдем как производную смещения x по времени:

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx}{dt} = -A\ \omega_0 \sin(\omega_0 t),$$

тогда в момент времени t_1 проекция вектора скорости равна

$$\upsilon_x(t_1) = -A\ \omega_0 \sin(\omega_0\, t_1).$$

Подставим числовые значения и вычислим:

$$\upsilon_x(t_1) = -0{,}2 \cdot \frac{5\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6} \cdot 0{,}4\right) = -\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{3{,}14 \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot 2} = -0{,}45 \text{ (м/с)}.$$

4) Зависимость проекции на ось *Ox* силы упругости $F_x(t)$ от времени при гармонических колебаниях имеет вид

$$F_x(t) = -k\,x(t) = -k\,A\ \cos(\omega_0 t) = -m\omega_0^2\,A\ \cos(\omega_0 t),$$

тогда в момент времени t_1 проекция силы упругости равна

$$F_x(t_1) = -m\omega_0^2\,A\ \cos(\omega_0\, t_1).$$

Подставим числовые значения и вычислим:

$$F_x(t_1) = -10^{-2} \cdot \frac{25\pi^2}{36} \cdot 0{,}2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6} \cdot 0{,}4\right) = -\frac{5 \cdot 10^{-2}\,\pi^2}{36} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}14^2}{36} \cdot \frac{1}{2} \approx -6{,}85 \cdot 10^{-3} \text{ (Н)} = -6{,}85 \text{ (мН)}.$$

Ответ: 1) $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2,4$ с;

2) $W = \dfrac{m\omega_0^2 A^2}{2}$ =1,37 мДж;

3) $\upsilon_x(t_1) = -A\ \omega_0 \sin(\omega_0 t_1)$ = – 0,45 м/с;

4) $F_x(t_1) = -m\omega_0^2\ A\ \cos(\omega_0 t_1)$ = – 6,85 мН.

Пример 8. Азот (N_2) находится в равновесном состоянии, при котором средняя кинетическая энергия поступательного движения одной его молекулы составляет $6,21 \cdot 10^{-21}$ Дж. Определить: 1) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы; 2) среднюю энергию теплового движения молекулы; 3) среднюю квадратичную скорость молекулы. Молекула жесткая.

Дано:

$i = 5$

$\left\langle W^k_{пост} \right\rangle = 6{,}21 \cdot 10^{-21}$ Дж

1) $\left\langle W^k_{вращ} \right\rangle$ – ?

2) $\langle W \rangle$ – ?

3) $\upsilon_{кв}$ – ?

Решение:

Согласно закону о равном распределении средней энергии по степеням свободы в состоянии теплового равновесия на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $kT/2$,

где k – постоянная Больцмана,

T – абсолютная температура газа. Для двухатомной молекулы с жесткой связью между атомами общее число степеней свободы $i = 5$, из них число степеней свободы поступательного движения $i_{пост} = 3$ и число степеней вращательного движения $i_{вращ} = 2$.

Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы:

$$\left\langle W^k_{пост} \right\rangle = \frac{i_{пост}}{2} kT = \frac{3}{2} kT; \qquad (1)$$

средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы:

$$\left\langle W^{k}_{вращ} \right\rangle = \frac{i_{вращ}}{2} kT = \frac{2}{2} kT = kT \quad ; \qquad (2)$$

средняя энергия теплового движения молекулы:

$$\left\langle W \right\rangle = \frac{i}{2} kT = \frac{5}{2} kT \quad . \qquad (3)$$

Из уравнения (1) выразим $kT = \frac{2\left\langle W^{k}_{пост} \right\rangle}{3}$ (4)

и, подставив в уравнение (2), получим выражение для средней кинетической энергии вращательного движения молекулы:

$$\left\langle W^{k}_{вращ} \right\rangle = \frac{2\left\langle W^{k}_{пост} \right\rangle}{3} \quad .$$

Подставим числовые значения:

$$\left\langle W^{k}_{вращ} \right\rangle = \frac{2 \cdot 6{,}21 \cdot 10^{-21}}{3} = 4{,}14 \cdot 10^{-21} \text{ (Дж)}.$$

Подставив (4) в уравнение (3), получим выражение для средней энергии теплового движения молекулы:

$$\left\langle W \right\rangle = \frac{5}{2} \cdot \frac{2\left\langle W^{k}_{пост} \right\rangle}{3} = \frac{5\left\langle W^{k}_{пост} \right\rangle}{3}.$$

Подставим числовые значения:

$$\left\langle W \right\rangle = \frac{5 \cdot 6{,}21 \cdot 10^{-21}}{3} = 10{,}35 \cdot 10^{-21} \text{ (Дж)}.$$

Средняя квадратичная скорость $\upsilon_{кв}$ молекулы массой m_0 газа, находящегося при температуре T, равна

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \qquad (5)$$

Массу m_0 одной молекулы можно выразить через молярную массу M этого газа:

$$m_0 = \frac{M}{N_A}, \qquad (6)$$

где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро.

В «Основных физических константах и величинах» находим значение молярной массы M азота (N_2) (M равна произведению относительной молекулярной массы $M_r = 2 \cdot 14 = 28$ азота на множитель 10^{-3} кг/моль):

$$M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Подставив в (5) выражения (6) и (4), выражение для средней квадратичной скорости молекулы примет вид:

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{3kT\,N_A}{M}} = \sqrt{\frac{3\,N_A}{M} \cdot \frac{2\left\langle W^k_{пост}\right\rangle}{3}} = \sqrt{\frac{2N_A\left\langle W^k_{пост}\right\rangle}{M}}.$$

Подставим числовые значения:

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 6{,}21 \cdot 10^{-21}}{28 \cdot 10^{-3}}} = 517 \text{ (м/с).}$$

Ответ: 1) $\left\langle W^{k}_{вращ} \right\rangle = \dfrac{2\left\langle W^{k}_{пост} \right\rangle}{3} = 4{,}14 \cdot 10^{-21}$ Дж;

2) $\left\langle W \right\rangle = \dfrac{5\left\langle W^{k}_{пост} \right\rangle}{3} = 10{,}35 \cdot 10^{-21}$ Дж;

3) $\upsilon_{кв} = \sqrt{\dfrac{2N_A\left\langle W^{k}_{пост.} \right\rangle}{M}} = 517$ м/с.

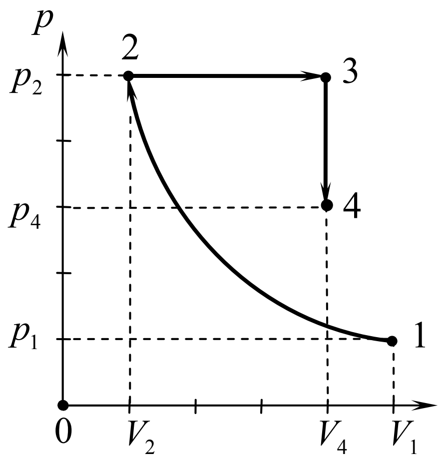

Рис. 37

Пример 9. Идеальный двухатомный (с жесткой связью) газ находится под давлением p_1 = 100 кПа, занимая при этом объем V_1 = 100 л. Над газом последовательно проводят следующие процессы: $1 \to 2$ – изотермическое сжатие до объема $V_2 = \frac{V_1}{5}$; $2 \to 3$ – изобарное увеличение объема до $V_3 = \frac{4}{5} V_1$; $3 \to 4$ – изохорное понижение давления до $p_4 = 3\,p_1$. На Vp-диаграмме изобразить график процесса $1 \to 2 \to 3 \to 4$. Определить в ходе всего процесса: 1) изменение внутренней энергии газа;

2) работу сил давления газа; 3) количество теплоты, переданное при этом газу.

Дано:	***Решение:***

$i = 5$

$p_1 = 100$ кПа $= 10^5$ Па

$V_1 = 100$ л $= 0{,}1$ м^3

$T_2 = T_1$, $V_2 = \dfrac{V_1}{5}$

$p_3 = p_2$, $V_3 = \dfrac{4}{5}V_1$

$V_4 = V_3$, $p_4 = 3p_1$

1) $\Delta U - ?$

2) $A - ?$

3) $Q - ?$

Физическая система представляет собой идеальный двухатомный газ (каждая двухатомная жесткая молекула имеет число степеней свободы $i = 5$), который последовательно подвергается изотермическому сжатию ($1 \to 2$), изобарному расширению ($2 \to 3$) и изохорному уменьшению давления ($3 \to 4$).

На *Vp*-диаграмме (Рис. 37) изображены графики этих процессов: изотерма ($1 \to 2$), изобара ($2 \to 3$) и изохора ($3 \to 4$).

Выразим давление p_2 газа в состоянии *2* через давление p_1 в состоянии *1*. Так как процесс $1 \to 2$ изотермический, то $p_1V_1 = p_2V_2$, откуда

$$p_2 = p_1\frac{V_1}{V_2} = 5p_1 \qquad (1)$$

Изменение внутренней энергии ΔU идеального газа не зависит от типа процесса, поскольку внутренняя энергия является функцией состояния. Поэтому изменение внутренней энергии газа в ходе процесса $1 \to 2 \to 3 \to 4$ будет равно

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R(T_4 - T_1) = \frac{i}{2}(\nu R T_4 - \nu R T_1), \qquad (2)$$

где ν – количество вещества газа, T_4 и T_1 – температура газа в состоянии *4* (конечном) и *1* (начальном) соответственно, *R* – универсальная газовая постоянная.

Параметры газа в состояниях *4* и *1* связаны уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$p_4 V_4 = \nu R T_4 \quad \text{и} \quad p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

тогда выражение (2) можно записать так:

$$\Delta U = \frac{i}{2}(p_4 V_4 - p_1 V_1).$$

Учитывая, что $p_4 = 3p_1$ и $V_4 = V_3 = \frac{4}{5}V_1$, для изменения внутренней энергии ΔU газа в ходе процесса $1 \to 2 \to 3 \to 4$ получаем следующее выражение:

$$\Delta U = \frac{i}{2}(3p_1 \cdot \frac{4}{5}V_1 - p_1 V_1) = \frac{i}{2} \cdot \frac{7 p_1 V_1}{5} = \frac{7 \cdot i}{10} p_1 V_1. \qquad (3)$$

Элементарная работа δA сил давления газа при малом изменении его объема dV равна

$$\delta A = p\,dV, \tag{4}$$

тогда работу A сил давления газа при конечном изменении его объема от V_1 до V_2 можно вычислить как

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV, \tag{5}$$

где $p = p(V)$ – зависимость давления газа от его объема. Поскольку вид функции $p = p(V)$ зависит от типа процесса, в ходе которого изменяется объем газа, то работа, совершаемая газом, также зависит от типа процесса. Поэтому работу A сил давления газа в ходе процесса $1 \to 2 \to 3 \to 4$ необходимо представить в виде алгебраической суммы работ, совершаемых силами давления газа в каждом отдельном процессе: A_{12} – при изотермическом сжатии, A_{23} – при изобарном расширении, A_{34} – при изохорном процессе:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34}. \tag{6}$$

Вид функции $p = p(V)$ в каждом отдельном процессе можно получить из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT.$$

При изотермическом процессе *1→2* (количество вещества газа ν = *const* и его температура T_1 = *const*) зависимость давления p газа от его объема V имеет вид

$$p(V) = \frac{\nu RT_1}{V},$$

тогда работа A_{12} сил давления газа при его изотермическом сжатии от объема V_1 до объема V_2 будет равна

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT_1}{V} dV = \nu RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT_1 \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT_1 (\ln V_2 - \ln V_1) = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Учитывая, что $p_1 V_1 = \nu RT_1$ и $V_2 = \dfrac{V_1}{5}$, получаем

$$A_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{1}{5} = -p_1 V_1 \ln 5. \qquad (7)$$

При изобарном процессе *2→3* давление газа остается постоянным $p_2 = const$, поэтому работа A_{23} сил давления газа при его изобарном расширении от объема V_2 до объема V_3 будет равна

$$A_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p_2\, dV = p_2(V_3 - V_2) = p_2 V_3 - p_2 V_2 .$$

С учетом выражения (1) $p_2 = 5p_1$, а также условия задачи $V_2 = \frac{V_1}{5}$ и $V_3 = \frac{4}{5}V_1$ получаем

$$A_{23} = 5p_1\left(\frac{4V_1}{5} - \frac{V_1}{5}\right) = 3p_1V_1 . \qquad (8)$$

При изохорном процессе $3 \to 4$ объем газа не изменяется, поэтому работы силы давления газа не совершают:

$$A_{34} = 0 . \qquad (9)$$

Подставляя выражения (7), (8) и (9) в выражение (3), найдем работу A сил давления газа в ходе процесса $1 \to 2 \to 3 \to 4$:

$$A = -p_1V_1 \ln 5 + 3p_1V_1 = p_1V_1(-\ln 5 + 3) . \qquad (10)$$

Согласно I началу термодинамики количество теплоты Q, переданное газу в процессе $1 \to 2 \to 3 \to 4$, равно сумме изменения внутренней энергии ΔU газа и работы A, совершаемой его силами давления этом процессе:

$$Q = \Delta U + A.$$

Учитывая выражения (3) и (10), количество теплоты Q, переданное газу в процессе $1 \to 2 \to 3 \to 4$, будет равно

$$Q = \frac{7 \cdot i}{10} p_1 V_1 + p_1 V_1 (-\ln 5 + 3) = p_1 V_1 \left(\frac{7 \cdot i}{10} - \ln 5 + 3 \right). \qquad (11)$$

Подставляя в (3), (10) и (11) числовые значения, получаем

$$\Delta U = \frac{7 \cdot 5}{10} \cdot 10^5 \cdot 0{,}1 = 3{,}5 \cdot 10^4 \text{ (Дж)} = 35 \text{ (кДж)},$$

$$A = 10^5 \cdot 0{,}1 \cdot (-\ln 5 + 3) = 10^4 \cdot (-1{,}6 + 3) = 1{,}4 \cdot 10^4 \text{ (Дж)} = 14 \text{ (кДж)},$$

$$Q = 10^5 \cdot 0{,}1 \cdot \left(\frac{7 \cdot 5}{10} - \ln 5 + 3 \right) = 10^4 \cdot (3{,}5 - 1{,}6 + 3) = 4{,}9 \cdot 10^4 \text{ (Дж)} = 49 \text{ (кДж)}.$$

Ответ: 1) $\Delta U = \dfrac{7 \cdot i}{10} p_1 V_1 = 35\,\text{кДж}$;

2) $A = p_1 V_1 \left(-\ln 5 + 3\right) = 14\,\text{кДж}$;

3) $Q = p_1 V_1 \left(\dfrac{7 \cdot i}{10} - \ln 5 + 3\right) = 49\,\text{кДж}$.

Пример 10. Идеальный газ совершает цикл Карно. Определить температуру холодильника, если температура нагревателя равна 608 К, а количество теплоты, подводимое к газу за цикл, в 1,9 раза больше работы, совершаемой при этом силами давления газа.

Дано:

$T_1 = 608$ К

$\dfrac{Q_1}{A} = n = 1{,}9$

Решение:

Физическая система представляет собой идеальный газ, совершающий цикл Карно, КПД которого равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \qquad (1)$$

$T_2 - ?$

где T_1 и T_2 – температура нагревателя и холодильника соответственно.

В то же время КПД любого циклического процесса показывает, какая доля количества теплоты, подводимого к газу за цикл, преобразуется в механическую работу, т.е.

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}, \qquad (2)$$

где Q_1 – количество теплоты, подводимое газу за цикл, Q_2 – количество теплоты, отводимое от газа за цикл, $A = Q_1 - |Q_2|$ – работа, совершаемая силами давления газа за цикл.

Приравняем правые части равенств (1) и (2):

$$1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{A}{Q_1}.$$

Выразим из полученного уравнения температуру холодильника T_2, учитывая, что $\dfrac{Q_1}{A} = n$:

$$T_2 = T_1\left(1 - \frac{A}{Q_1}\right) = T_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) = T_1 \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Произведем вычисления:

$$T_2 = 608 \cdot \frac{1{,}9 - 1}{1{,}9} = 608 \cdot \frac{0{,}9}{1{,}9} = 288\ (\text{К}).$$

Ответ: $T_2 = T_1 \cdot \dfrac{n-1}{n} = 288\ \text{К}$.