Рябушко ИДЗ – 1.2
Задание 1.1

Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);
в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2*1 - 1*(-1) + 3*(-5) = -12$$

Т. к. $\Delta \neq 0$, следовательно, система совместна и имеет единственное решение.

а) по формулам Крамера;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -36$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -12$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-36}{-12} = 3 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{-12} = -2 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1$$

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$
$$X = A^{-1}B$$

Найдем обратную матрицу :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 1 & -7 & 4 \\ -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 1 & -7 & 4 \\ -5 & -1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1*7+5*1-8*6 \\ 1*7-7*1+4*6 \\ -5*7-1*1+4*6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -36 \\ 24 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 1$$

в) методом Гаусса.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 1$$