Задача 12.26

Движение точки задано в полярных координатах уравнениями $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$, где a и k — заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки как функции ее радиуса-вектора r.

Решение

Из уравнений движения точки:

$$\begin{cases} r = ae^{kt}, \\ \varphi = kt \end{cases}$$

исключим параметр t. Получим уравнение траектории

$$r = ae^{\varphi},$$

задающее логарифмическую спираль.

Найдем проекции скорости в полярных координатах:

$$v_r = \dot{r} = kae^{kt} = kr, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = rk,$$

следовательно,

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{r^2k^2 + r^2k^2} = kr\sqrt{2}.$$

Найдем проекции ускорения w на оси полярных координат:

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = ak^2e^{kt} - ak^2e^{kt} = 0,$$

$$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2k^2ae^{kt} = 2k^2r.$$

Ускорение точки

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2} = 2k^2r.$$

Определим

$$w_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = k^2\sqrt{2}ae^{kt} = k^2r\sqrt{2},$$

тогда

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = k^2r\sqrt{2}.$$

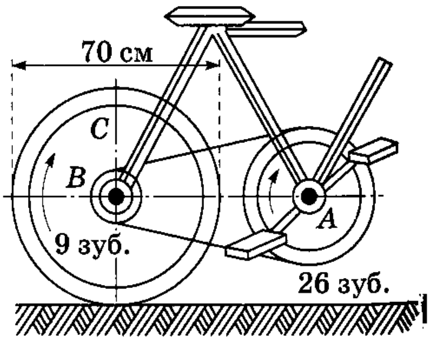
Радиус кривизны

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{2k^2r^2}{k^2r\sqrt{2}} = r\sqrt{2}.$$

Ответ: $r = ae^{\varphi}$— логарифмическая спираль;
$v = kr\sqrt{2}$; $w = 2k^2r$; $\rho = r\sqrt{2}$.

Задача 16.30

Цепная передача в велосипеде состоит из цепи, охватывающей зубчатое колесо A с 26 зубцами и шестерню B с 9 зубцами. Шестерня B неизменно соединена с задним колесом C, диаметр которого равен 70 см. Определить скорость велосипеда, когда колесо A делает в секунду один оборот, а колесо C катится при этом без скольжения по прямолинейному пути.



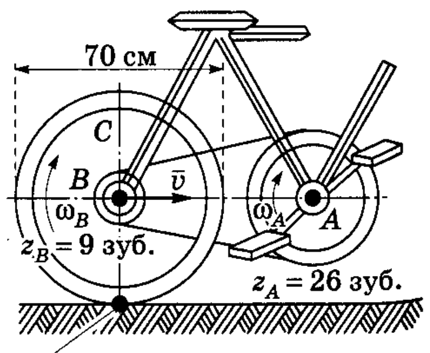
Решение

Обозначим: число зубцов колеса A и шестерни B соответственно z_A и z_B, их угловые скорости — ω_A и ω_B, v — скорость велосипеда, d — диаметр колеса. Имеем (см. рисунок):

$$\omega_A z_A = \omega_B z_B.$$

По условию

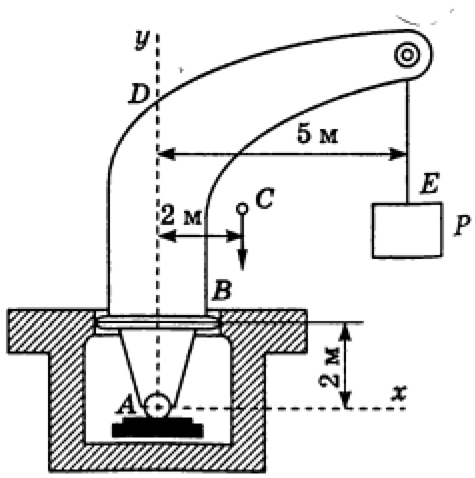
$$\omega_A = 1 \text{ об./с} = 2\pi \text{ рад/с}.$$



Мгновенный центр скоростей

Задача 4.18

Кран в шахте, поднимающий груз $P = 40$ кН, имеет подпятник A и в точке B опирается на гладкую цилиндрическую поверхность, ось которой Ay вертикальна. Длина хвоста $AB = 2$ м. Вылет крана $DE = 5$ м. Вес крана равен 20 кН и приложен в точке C, расстояние которой от вертикали Ay равно 2 м. Определить реакции опор A и B.



Решение

Покажем на рисунке действующие силы и реакции.

Составим уравнения равновесия крана (в проекциях на оси x и y и для моментов относительно точки A):

Найдем

$$\omega_B = \frac{v}{\frac{d}{2}} = \frac{2v}{d}.$$

Тогда

$$\omega_A z_A = \frac{2v}{d} \cdot z_B,$$

откуда

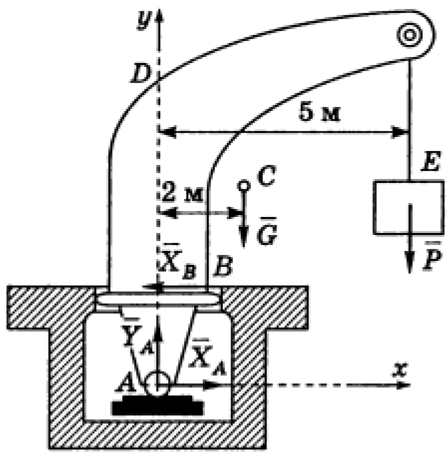
$$v = \frac{\omega_A d}{2} \frac{z_A}{z_B} = \frac{2\pi \cdot 0{,}7}{2} \cdot \frac{26}{9} = 6{,}353 \text{ м/с},$$

или

$$v = \frac{3600}{1000} \cdot 6{,}353 = 22{,}87 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $v = 22{,}87$ км/ч.

$$\begin{cases} X_A - X_B = 0, \\ Y_A - P - G = 0, \\ X_B \cdot 2 - G \cdot 2 - P \cdot 5 = 0. \end{cases}$$



Следовательно,

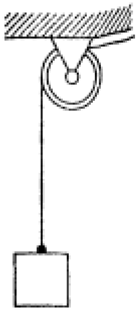
$$X_B = \frac{G \cdot 2 + P \cdot 5}{2} = \frac{40 \cdot 5 + 20 \cdot 2}{2} = 120 \text{ Н}.$$

$$Y_A = P + G = 60 \text{ Н}.$$

$$X_A = X_B = 120 \text{ Н}.$$

Ответ: $X_A = 120$ Н; $X_B = 120$ Н;
$Y_A = 60$ Н.

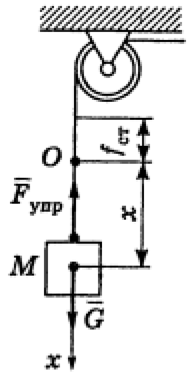
Задача 32.2



При равномерном спуске груза массы $M = 2$ т со скоростью $v = 5$ м/с произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором опускался груз, из-за защемления троса в обойме блока. Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $4 \cdot 10^6$ Н/м.

Решение

Груз колеблется под действием силы тяжести $\overline{G}$ и силы упругости $\overline{F}_{упр}$. Ось x направим вниз, начало координат O поместим в положение статического равновесия. Изобразим груз в произвольном положении M, определенном координатой x.



Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = G - F_{упр}, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = c\Delta$, $\Delta = f_{ст} + x$ — деформация троса.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = G - c(f_{ст} + x) = G - cf_{ст} - cx.$$

Так как в положении статического равновесия $G = F_{упр}(0) = cf_{ст}$, то

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение полученного уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 с учетом начальных условий: при $t = 0$ $x_0 = 0$, так как колебательное движение начинается из положения статического равновесия, то $\dot{x}_0 = v_0$, тогда $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{v_0}{k}$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (2) и получим

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Представим это уравнение в виде

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

где $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{k}\right)^2} = \dfrac{v_0}{k}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{kx_0}{\dot{x}_0} = \dfrac{k \cdot 0}{v_0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Тогда

$$\ddot{x} = -ak^2 \sin kt = -v_0 k \sin kt.$$

Из уравнения (1) определим силу упругости, т.е. натяжение троса,

$$F_{\text{упр}} = G - m\ddot{x} = m(g - \ddot{x}),$$

где $G = mg$.

Эта сила максимальна, когда $\ddot{x}$ принимает максимальное значение $\ddot{x} = -ak^2$ и направлена вверх, т.е. при $\sin(kt + \alpha) = 1$. Следовательно, наибольшее натяжение троса

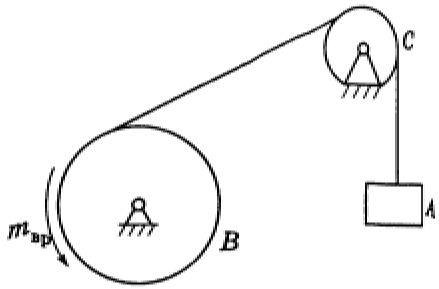
$$F_{\max} = m(g + ak^2) = m(g + v_0 k) = m\left(g + v_0\sqrt{\frac{c}{m}}\right) =$$

$$= 2\left(9{,}8 + 5\sqrt{\frac{4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3}}\right) = 466{,}8 \text{ (кН)}.$$

О т в е т: 466,8 кН.

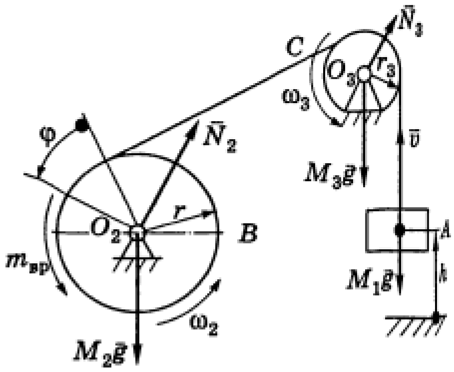
Задача 38.24

На рисунке изображен подъемный механизм лебедки. Груз A массы M_1, поднимается посредством троса, переброшенного через блок C и навитого на барабан B радиуса r массы M_2. К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $m_{вр} = a\varphi^2$, где a — постоянный коэффициент. Определить скорость груза A в момент, когда он поднимается на высоту h. Массу барабана B считать равномерно распределенной по его ободу. Блок C — сплошной диск массы M_3. Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



Решение

Рассмотрим движение данной механической системы. На систему действуют внешние силы: силы тяжести $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$ и $M_3\bar{g}$, вращающий момент $m_{вр}$, силы реакции связей $\overline{N}_2$ и $\overline{N}_3$. Покажем на рисунке начальное и конечное положения тел системы.



Для конечного положения системы, когда груз A поднялся на высоту h, покажем действующие силы, скорости тел, входящих в систему, а также их перемещения из начального в конечное положение.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как трос можно считать нерастяжимым, то работа внутренних сил системы равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

Кинетическая энергия в начальном положении, когда система находилась в покое, была равна нулю, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого уравнение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Определим кинетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия груза A, совершающего поступательное движение,

$$T_1 = \frac{M_1 v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия блоков B и C, совершающих вращательное движение,

$$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_2^2 = \frac{1}{2} M_2 r^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 v^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_0 \omega_3^2 = \frac{1}{2}\ \frac{M_3 r_3^2}{2}\ \frac{v^2}{r_3^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{2} + \frac{M_3 v^2}{4} = (2M_1 + 2M_2 + M_3)\frac{v^2}{4}. \qquad (4)$$

Найдем работу внешних сил при перемещении системы из начального в конечное положение:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_3 + A_{m_{\text{вр}}} + A_{N_2} + A_{N_3}. \qquad (5)$$

Работа силы тяжести груза A

$$A_1 = -M_1 g h.$$

Работа A_2 силы тяжести барабана B и работа A_3 силы тяжести блока C равны нулю.

Работа вращающего момента $m_{\text{вр}}$, приложенного к барабану B,

$$A_{m_{\text{вр}}} = \int_0^{\varphi} a\varphi^2 d\varphi = \frac{a\varphi^3}{3}.$$

Если выразить угол поворота барабана φ через длину наматываемого троса h

$$\varphi = \frac{h}{r},$$

то

$$A_{m_{\text{вр}}} = \frac{ah^3}{3r^3}.$$

Работа сил реакций A_{N_2} и A_{N_3} равна нулю.
Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = \frac{ah^3}{3r^3} - M_1 gh = \frac{(ah^2 - 3M_1 gr^3)h}{3r^3}. \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(2M_1 + 2M_2 + M_3)\frac{v^2}{4} = \frac{(ah^2 - 3M_1 gr^3)h}{3r^3}$$

и найдем скорость груза A в момент, когда он поднялся на высоту h:

$$v = \sqrt{\frac{4h(ah^2 - 3M_1 gr^3)}{3r^3(2M_1 + 2M_2 + M_3)}}.$$

О т в е т: $v = \sqrt{\frac{4h(ah^2 - 3M_1 gr^3)}{3r^3(2M_1 + 2M_2 + M_3)}}$.