

Оглавление

Задание № 1	4
Теоретические сведения	4
Метод бисекции (деления отрезка пополам)	4
Метод хорд (метод линейной интерполяции)	6
Метод касательных (метод Ньютона)	9
Метод секущих	11
Метод простых итераций	13
Задача 1.1	15
Задача 1.2	18
Задание № 2	20
Теоретические сведения	20
Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)	20
Задача 2.1	24
Задача 2.2	26
Задание № 3	28
Теоретические сведения	28
Метод Эйлера	28
Методы типа Рунге-Кутты	30
Задача 3.1	31
Литература	34
Схема выбора варианта	35
Варианты задач к заданию №1	35
Варианты задач к заданию №2	37
Варианты задач к заданию №3	38

Задание № 1

Определить корни уравнения $F(x) = 0$ графически и уточнить один из них:

- методом половинного деления,
- методом хорд,
- методом касательных,
- методом секущих,
- методом простой итерации

с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Создать функции, реализующие указанные методы, построить графическую иллюстрацию методов, результаты проверить с помощью встроенных функций.

Теоретические сведения

Метод бисекции (деления отрезка пополам)

Метод бисекции или метод деления отрезка пополам — простейший численный метод для решения нелинейных уравнений вида $F(x)=0$. Предполагается только непрерывность функции $F(x)$.

Задача заключается в нахождении корней нелинейного уравнения

$$F(x) = 0 \quad (1.1)$$

Для начала итераций необходимо знать интервал $[x_L, x_R]$ значений x , где находится единственный корень. Произведение значений функции на краях этого интервала получится меньше нуля:

$$F(x_L)F(x_R) < 0 \quad (1.2)$$

То есть функция меняет знак на данном интервале. Выберем точку внутри интервала

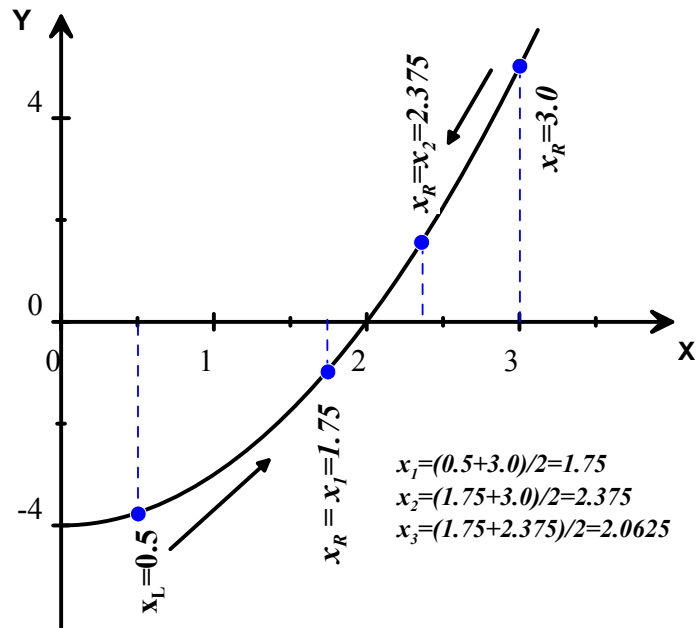


Рис. 1.1 Графическое представление метода бисекций (деления отрезка пополам)

$$x_M = \frac{(x_R + x_L)}{2} . \quad (1.3)$$

Разобьём этот интервал на два $[x_L, x_M]$ и $[x_M, x_R]$. Теперь найдём новый интервал, в котором функция меняет знак. Пусть $F(x_L)F(x_M) < 0$ и соответственно корень находится внутри интервала $[x_L, x_M]$. Тогда обозначим $x_R = x_M$ и повторим описанную процедуру до достижения требуемой точности. За количество итераций N первоначальный отрезок делится в 2^N раз. На рисунке 1.1 приведено графическое представление данного метода.

Ниже приведена программная реализация данного численного метода в пакете MathCAD:

$$\text{HalfSegmentDiv}(F, x_0, x_1, e) := \begin{cases} \infty & \text{if } F(x_0)F(x_1) > 0 \\ \text{otherwise} & \begin{cases} \text{while } |x_0 - x_1| \geq e \\ \quad \begin{cases} x \leftarrow \frac{x_0 + x_1}{2} \\ x_0 \leftarrow x \text{ if } F(x)F(x_0) > 0 \\ x_1 \leftarrow x \text{ otherwise} \end{cases} \end{cases} \\ x \end{cases}$$

Данная функция имеет следующие входные параметры:

- F – нелинейная функция $F(x)$;
- x_0 – начало интервала на котором производится поиск решения уравнения $F(x)=0$;
- x_1 – конец интервала на котором производится поиск решения уравнения $F(x)=0$;
- e – точность решения

В случае если на данном интервале решения не обнаружено, функция возвращает ∞ .

Метод хорд (метод линейной интерполяции)

Приведём метод, основанный на нахождении x_{i+1} по двум предыдущим приближениям x_i и x_{i-1} с помощью линейной интерполяции, называемый *методом хорд*.

Идея метода состоит в том, что по двум точкам $M_{i-1}(x_{i-1}; F(x_{i-1}))$ и $M_i(x_i; F(x_i))$ построить прямую $M_{i-1}M_i$ (то есть хорду, соединяющую две точки графика $y = F(x)$) и взять в качестве следующего приближения x_{i-1} абсциссу точки пересечения этой прямой с осью Ox . Иными словами, приближённо заменить на этом шаге функцию $F(x)$ её *линейной интерполяцией*, найденной по двум значениям x : x_{i-1} и x_i . (*Линейной интерполяцией* функции $F(x)$ назовём такую линейную функцию $L(x)$, значения которой совпадают со значениями $F(x)$ в двух фиксированных точках, в данном случае – в точках x_{i-1} и x_i).

В зависимости от того, лежат ли точки x_{i-1} и x_i по разные стороны от корня x^* или же по одну и ту же сторону, получаем следующие графические представления:

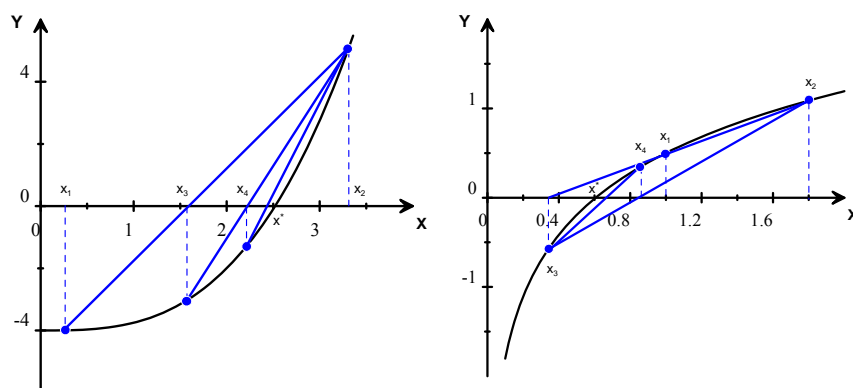


Рис.1.2. Построение последовательного приближения по методу хорд: два случая

Итак, очередное последовательное приближение будет зависеть от двух предыдущих: $x_{i+1} = \phi(x_{i-1}, x_i)$. Найдём выражение для функции ϕ . Интерполяционную линейную функцию $L(x)$ будем искать как функцию с угловым коэффициентом, равным разностному отношению:

$$k_i = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \quad (1.4)$$

построенному для отрезка между x_{i-1} и x_i , график которой проходит через точку M_i :

$$L(x) = F(x_i) + \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i). \quad (1.5)$$

Решая уравнение $L(x) = 0$, находим

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1}F(x_i) - x_iF(x_{i-1})}{F(x_i) - F(x_{i-1})} = x_i - \frac{F(x_i)}{\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}, \quad (1.6)$$

то есть

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1}F(x_i) - x_iF(x_{i-1})}{F(x_i) - F(x_{i-1})} = x_i - \frac{F(x_i)}{k_i}. \quad (1.7)$$

Заметим, что величина k_i может рассматриваться как разностное приближение для производной $F'(x)$ в точке x_i . Тем самым полученная формула (1.7) – это разностный аналог итерационной формулы метода Ньютона.

Вычисление по формуле вычисления ведутся по формуле (1.7) при $i=1,2,3\dots$, начиная с двух приближений x_0 и x_1 , взятых, по возможности, поближе к корню x^* . При этом не предполагается, что x^* лежит между x_0 и x_1 (и что значения функции F в точках x_0 и x_1 имеют разные знаки). При этом не гарантируется, что корень попадёт на отрезок между x_{i-1} и x_i на каком-либо следующем шаге (хотя это и не исключено). В таком случае затруднительно дать оценку погрешности, с которой x_{i+1} приближает истинное значение корня x^* , поэтому довольствуются таким эмпирическим правилом: вычисления прекращают, когда будет выполнено неравенство $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$, где ε – желаемая точность нахождения корня. При этом полагают приближённое значение корня равным $\tilde{x} = x_{i+1}$.

Приведем программную реализацию метода хорд в пакете MathCAD:

```

ChordsMethod (F, x0, x1, e) :=
  x0 ← x0
  x1 ← x1
  i ← 1
  while |x_{i-1} - x_i| > e
    k ← (F(x_i) - F(x_{i-1})) / (x_i - x_{i-1})
    x_{i+1} ← x_i - F(x_i) / k
    i ← i + 1
  x_i

```

Данная функция имеет следующие входные параметры:

- F – нелинейная функция $F(x)$;
- x_0 – начало интервала на котором производится поиск решения уравнения $F(x)=0$;
- x_1 – конец интервала на котором производится поиск решения уравнения $F(x)=0$;
- e – точность решения

В случае если на данном интервале решения не обнаружено, функция возвращает ∞ .

Метод касательных (метод Ньютона)

Рассмотрение метода одной касательной позволяет предположить, что итерации станут приближаться к корню ещё быстрее, если мы будем выбирать касательную вместо секущей не только на первом, а на каждом шаге. Ясно, что тогда формула итераций будет иметь вид

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)} \quad (1.8)$$

Этот метод называется *методом касательных*, или *методом Ньютона*. Действительно, последовательные приближения метода Ньютона сходятся гораздо быстрее, чем в общем методе итераций (скорость сходимости приближений в котором, напомним, та же, что у геометрической прогрессии со знаменателем γ при $0 < \gamma < 1$).

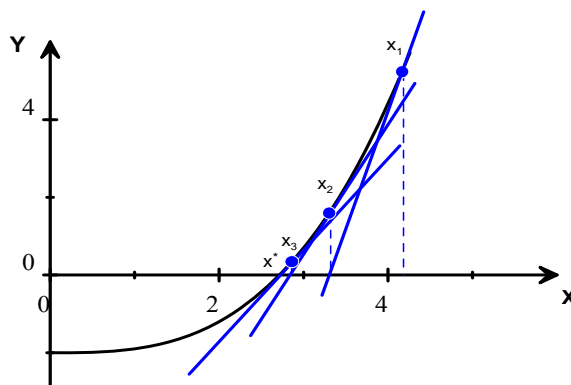


Рис.1.3. Последовательные приближения метода Ньютона (касательных)

Геометрический смысл метода Ньютона состоит в том, что на каждом шаге мы строим касательную к графику в точке очередного последовательного приближения x_i , а за следующее приближение x_{i+1} берём точку пересечения этой касательной с осью Ox . Тем самым наклон прямой подстраивается на каждом шаге наилучшим образом (ведь кривизну графика, связанную со второй производной, мы не учитываем, и поэтому неизвестно, в какую сторону от касательной отклонится график).

Заметим, что по-другому идею метода Ньютона мы можем описать так: на каждом шаге вместо исходного уравнения $F(x)=0$ мы решаем приближённое, *линеаризованное* в точке x_i уравнение:

$$F(x_i) + F'(x_i)(x - x_i) = 0, \quad (1.9)$$

в котором левая часть – это многочлен Тейлора первого порядка для функции $F(x)$ в точке x_i , то есть линейная функция

$$L_{x_i}(x) = F(x_i) + F'(x_i)(x - x_i). \quad (1.10)$$

Решением линеаризованного уравнения $L_{x_i}(x) = 0$ служит следующее приближение x_{i+1} , в то время как решением исходного точного уравнения $F(x)$ служит искомым корень x^* .

Приведем программную реализацию метода касательных или метода Ньютона в пакете MathCAD:

```
NewtonMethod (F, x0, e) :=
  x ← x0
  F1(x) ←  $\frac{d}{dx} F(x)$ 
  y ←  $\frac{F(x)}{F1(x)}$ 
  while |y| > e
    x ← x - y
    y ←  $\frac{F(x)}{F1(x)}$ 
  x
```

Данная функция имеет следующие входные параметры:

- F – нелинейная функция $F(x)$;

- x_0 – начальное приближение поиск решения уравнения $F(x)=0$;
- e – точность решения

Метод секущих

В качестве функции $\lambda(x)$ берут любую постоянную λ_0 , знак которой совпадает со знаком производной $F'(x)$ в окрестности E (и, в частности, на отрезке, соединяющем x_0 и x^*). Постоянная λ_0 не зависит также и от номера шага i . Тогда формула итераций оказывается очень проста:

$$x_{i+1} = x_i - \lambda_0 F(x_i),$$

и на каждой итерации нужно один раз вычислить значение функции $F(x)$.

Выясним смысл этой формулы, а также смысл условия о совпадении знаков $F'(x)$ и λ_0 . Рассмотрим прямую, проходящую через точку $(x_i; F(x_i))$ на графике $y = F(x)$ с угловым коэффициентом $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\lambda_0}$. Тогда уравнением этой прямой будет:

$$y = F(x_i) + \frac{1}{\lambda_0}(x - x_i).$$

Найдём точку пересечения этой прямой с осью Ox из уравнения

$$F(x_i) + \frac{1}{\lambda_0}(x - x_i) = 0,$$

откуда $x = x_i - \lambda_0 F(x_i)$. Следовательно, эта прямая пересекает ось Ox как раз в точке следующего приближения. Тем самым получаем следующую геометрическую интерпретацию последовательных приближений. Начиная с точки x_0 , через соответствующие точки графика $y = F(x)$ проводятся секущие с угловым коэффициентом $k = \frac{1}{\lambda_0}$ того же знака, что производная

$F'(x)$. (Заметим, что, во-первых, значение производной вычислять

не обязательно, достаточно лишь знать, убывает функция $F(x)$ или возрастает; во-вторых, что прямые, проводимые при разных x_i , имеют один и тот же угловой коэффициент k и, следовательно, параллельны друг другу.) В качестве следующего приближения к корню берётся точка пересечения построенной прямой с осью Ox .

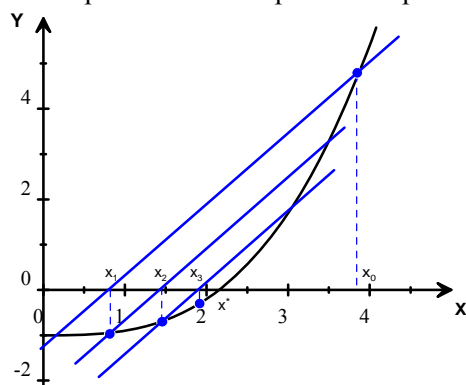


Рис. 1.4. Графическая интерпретация метода секущих

На рисунке 1.4 изображены итерации при $F'(x) > 0$, в случае $k = \frac{1}{\lambda_0} > F'(x_0)$. Мы видим, что последовательные точки x_i приближаются к корню, оставаясь всё время с одной стороны от него.

Программная реализация данного метода в пакете MathCAD выглядит так:

```
SectantMethod (F, x0, x1, e) :=
  while |x1 - x0| > e
  |
  | x ← x1 -  $\frac{F(x1)(x1 - x0)}{F(x1) - F(x0)}$ 
  | x0 ← x1
  | x1 ← x
  |
  x ← x1
  x
```

Данная функция принимает следующие параметры:

- F – нелинейная функция $F(x)$;
- x_0 – начало интервала на котором производится поиск решения уравнения $F(x)=0$;
- l – конец интервала на котором производится поиск решения уравнения $F(x)=0$;
- e – точность решения

Метод простых итераций

Предположим, что уравнение $F(x)=0$ при помощи некоторых тождественных преобразований приведено к виду $F(x)=x$.

Заметим, что такое преобразование можно вести разными способами, и при этом будут получаться разные функции $\phi(x)$ в правой части уравнения. Уравнение $F(x)=0$ эквивалентно уравнению $x = x + \lambda(x)F(x)$ при любой функции $\lambda(x) \neq 0$. Таким образом, можно взять $\phi(x) = x + \lambda(x)F(x)$ и при этом выбрать функцию (или постоянную) $\lambda \neq 0$ так, чтобы функция $\phi(x)$ удовлетворяла тем свойствам, которые понадобятся нам для обеспечения нахождения корня уравнения.

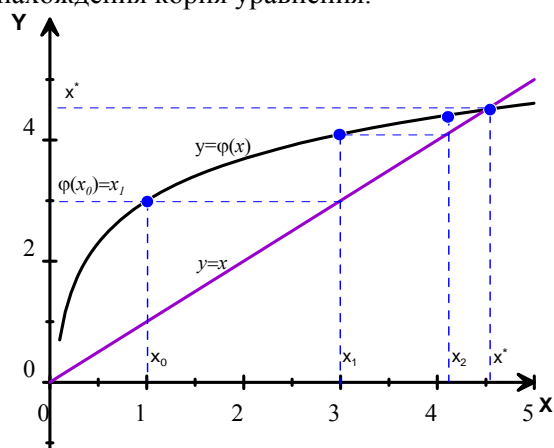


Рис. 1.5. Точка x^* – решение уравнения $x = \phi(x)$

Для нахождения корня уравнения $x = \phi(x)$ выберем какое-либо начальное приближение x_0 (расположенное, по возможности, близко к корню x^*). Далее будем вычислять последующие приближения $x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}$ по формулам

$$x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1), \dots, x_{i+1} = \phi(x_i), \dots,$$

то есть, используя каждое вычисленное приближение к корню в качестве аргумента функции $\phi(x)$ в очередном вычислении. Такие вычисления по одной и той же формуле $x_{i+1} = \phi(x_i)$, когда полученное на предыдущем шаге значение используется на последующем шаге, называются *итерациями*. *Итерациями* называют часто и сами значения x_i , полученные в этом процессе (то есть, в нашем случае, последовательные приближения к корню).

Заметим тот факт, что x^* – корень уравнения $x = \phi(x)$, означает, что x^* есть абсцисса точки пересечения графика $y = \phi(x)$ с прямой $y = x$. Если же при каком-либо x_0 вычислено значение $x_1 = \phi(x_0)$, и взято в качестве нового аргумента функции, то это означает, что через точку графика $(x_0; \phi(x_0))$ проводится горизонталь до прямой $y = x$, а оттуда опускается перпендикуляр на ось Ox . Там и будет находиться новый аргумент x_1 .

Ниже приведен программный код метода простых итераций написанный средствами программирования пакета MathCAD.

$$\text{SingleIterationMethod}(F, x_0, N, \epsilon) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow F(x_0) \\ i \leftarrow 0 \\ \text{while } i \leq N \wedge |F(x) - x| > \epsilon \cdot |x| \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow i + 1 \\ x \leftarrow F(x) \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

Данная функция имеет следующие входные параметры:

- F – нелинейная функция $F(x)$;

- x_0 – начальное приближение при поиске решения уравнения $F(x)=0$;
- N – число итераций процесса;
- e – точность решения.

Задача 1.1

Площадь кругового сегмента, дуга которого α , определяется формулой:

$$Q = \frac{1}{2} \pi R^2 (\alpha - \sin \alpha)$$

где α – радиальная мера дуги. Необходимо найти сегмент, площадь которого равна 1/5 площади круга, то есть найти угловую меру дуги сегмента.

Площадь круга определяется по формуле:

$$S = \pi R^2,$$

Из условий получаем равенство:

$$\frac{1}{5} \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi R^2 (\alpha - \sin \alpha)$$

Таким образом, нам необходимо решить нелинейное уравнение:

$$\frac{1}{5} \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi R^2 (\alpha - \sin \alpha) = 0$$

Чтобы решить данное уравнение методом простых итераций требуется привести его к виду $F(x) = x$

$$\frac{1}{5} \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi R^2 \alpha + \frac{1}{2} \pi R^2 \sin \alpha = 0$$

Поделим последнее уравнение на πR^2 (поскольку выражение πR^2 не может равняться нулю), получим

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = 0$$

После преобразований получаем выражение для метода простых итераций:

$$0.4 + \sin \alpha = \alpha$$

На рисунках 1.6-1.7 приведены графические решения для данной задачи

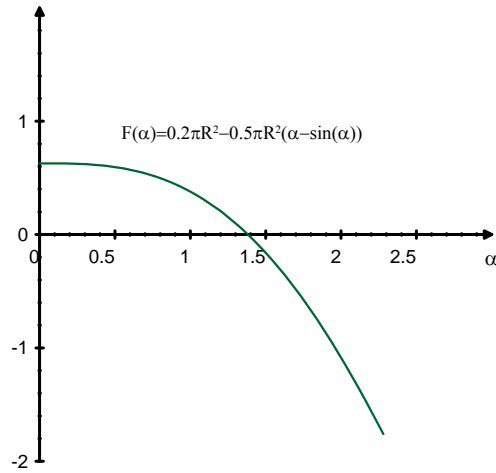


Рис. 1.6 График функции $F(\alpha) = \frac{1}{5}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2(\alpha - \sin \alpha)$

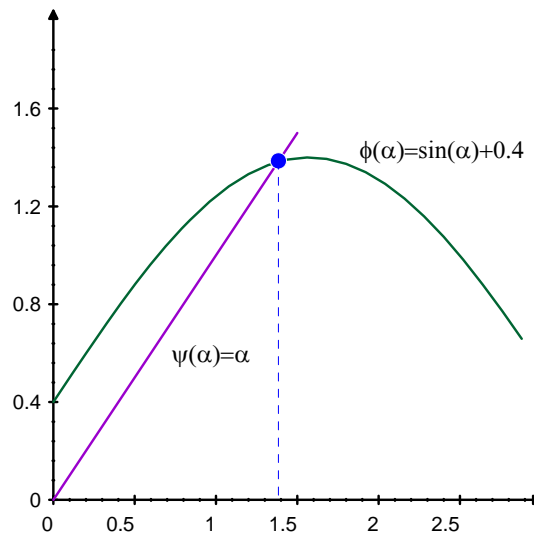


Рис. 1.7. График функции $F_1(\alpha) = \phi(\alpha) = 0.4 + \sin \alpha$ для решения методом простых итераций

Сравним результаты, полученные путем решения собственными средствами пакета MathCAD для данной задачи, с решениями, полученными разными методами решения:

$R := 1$ Пусть радиус равен единице.

$F(\alpha) := 0.2\pi R^2 - 0.5\pi \cdot R^2(\alpha - \sin(\alpha))$

Функция, корни которой необходимо найти.

$F1(\alpha) := \sin(\alpha) + 0.4$

Функция для решения задачи методом простых итераций.

Получим решение стандартными средствами MathCAD:

$\alpha_0 := \text{root}(F(\alpha), \alpha, 0, 2\pi)$

$\alpha_0 = 1.3823$

Вызываем функцию для решения уравнений методом деления отрезка пополам:

$\alpha_1 := \text{HalfSegmentDiv}(F, 0, 3, 0.001)$

$\alpha_1 = 1.3821$

А теперь для решения уравнений методом деления хорд:

$\alpha_2 := \text{ChordsMethod}(F, 0.02, 0.05, 0.001)$

$\alpha_2 = 1.3823$

Используем метод Ньютона (метод касательных):

$\alpha_3 := \text{NewtonMethod}(F, 0.01, 0.001)$

$\alpha_3 = 1.3823$

Вызываем функцию для решения уравнений методом секущих:

$\alpha_4 := \text{SectantMethod}(F, 0, 3, 0.001)$

$\alpha_4 = 1.3823$

Используем метод простых итераций (используем подготовленную ранее функцию F1)

$\alpha_5 := \text{SingleIterationMethod}(F1, 0.02, 20, 0.001)$

$\alpha_5 = 1.3816$

Итак, решение найдено: угловая мера дуги сегмента, для которого площадь составляет пятую часть площади круга, равна 1.3816 радиан или 79.199°.

Задача 1.2

Решить уравнение $\cos(x + 0.5) = x^3$.

Методы решения нелинейных уравнений написаны таким образом, что одним из параметров процедуры является функция $F(x)$. Таким образом, мы можем передавать в процедуру метода расчета произвольную функцию. В нашем случае это функция:

$$F(x) = x^3 - \cos(x + 0.5).$$

После некоторых преобразований получаем функцию для решения методом простых итераций:

$$F_1(x) = \sqrt[3]{\cos(x + 0.5)}.$$

Графики этих функций приведены на рисунках 1.8 и 1.9:

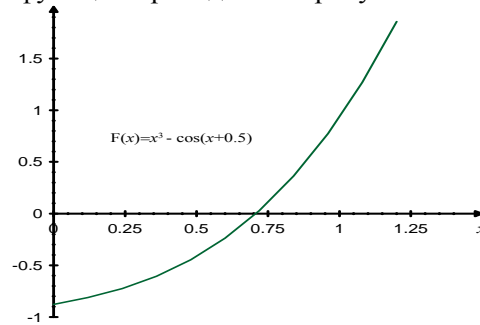


Рис. 1.8. График функции $F(x) = x^3 - \cos(x + 0.5)$

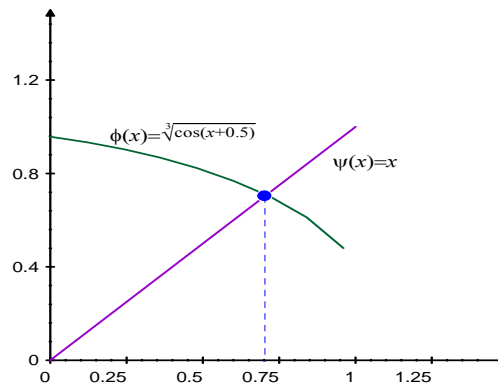


Рис. 1.9. График функции $F_1(x) = \sqrt[3]{\cos(x + 0.5)}$ для решения методом простых итераций

Приведем сравнение для решения данного уравнения разными методами и внутренними средствами пакета MathCAD:

$$W(x) := x^3 - \cos(x + 0.5)$$

Функция, корни которой необходимо найти.

$$W1(x) := \left(\sqrt[3]{\cos(x + 0.5)} \right)$$

Функция для решения задачи методом простых итераций.

Получим решение стандартными средствами MathCAD:

$$x_0 := \text{root}(W(x), x, 0, \pi) \quad x_0 = 0.7080$$

Вызываем функцию для решения уравнений методом деления отрезка пополам:

$$x_1 := \text{HalfSegmentDiv}(W, 0, 3, 0.001) \quad x_1 = 0.7083$$

А теперь для решения уравнений методом хорд:

$$x_2 := \text{ChordsMethod}(W, 0.01, 0.05, 0.001) \quad x_2 = 0.7080$$

Используем метод Ньютона (метод касательных):

$$x_3 := \text{NewtonMethod}(W, 0.01, 0.001) \quad x_3 = 0.7082$$

Используем метод секущих:

$$x_4 := \text{SectantMethod}(W, 0, 3, 0.001) \quad x_4 = 0.7080$$

Используем метод простых итераций (используем подготовленную ранее функцию F1)

$$x_5 := \text{SingleIterationMethod}(W1, 0.02, 40, 0.001) \quad x_5 = 0.7084$$

Итак, решение уравнения найдено:

$$x = 0.7080.$$

Задание № 2

Решить систему уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса-Жордана

Составить функции, реализующие метод, проверить решение с помощью встроенных функций MathCAD.

$$\begin{cases} 0.98x_1 + 0.88x_2 - 0.24x_3 = 1.36 \\ 0.16x_1 - 0.44x_2 - 0.88x_3 = -1.27 \\ 9.74x_1 - 10.0x_2 + 1.74x_3 = 5.31 \end{cases}$$

Теоретические сведения**Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)**

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными $Ax = b$. Требуется найти ее общее решение, если она совместна, или установить ее несовместность. Выпишем расширенную матрицу системы

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Назовем *элементарными операциями* следующие действия с матрицами:

- 1) перестановка строк;
- 2) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 3) сложение строки с другой строкой, умноженной на число.

Отметим, что при решении системы уравнений, в отличие от вычисления определителя и нахождения ранга, нельзя оперировать со столбцами.

Легко проверить, что если по матрице, полученной из A^* выполнением элементарной операции, восстановить систему уравнений, то новая система будет равносильна исходной.

Цель алгоритма – с помощью применения последовательности элементарных операций к матрице A^* добиться, чтобы каждая строка, кроме, быть может, первой, начиналась с нулей, и число нулей до первого ненулевого элемента в каждой следующей строке было больше, чем в предыдущей.

Шаг алгоритма заключается в следующем. Находим первый ненулевой столбец в матрице A^* . Пусть это будет столбец с номером i . Находим в нем ненулевой элемент и строку с этим элементом меняем местами с первой строкой. Чтобы не нагромождать дополнительных обозначений, будем считать, что такая смена строк в матрице A^* уже произведена, то есть $a_{1i} \neq 0$. Тогда ко второй строке прибавим первую, умноженную на число $-\frac{a_{2i}}{a_{1i}}$, к третьей строке прибавим первую, умноженную на число $-\frac{a_{3i}}{a_{1i}}$, и т.д. В результате получим матрицу

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2i+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mi+1}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

(Первые нулевые столбцы, как правило, отсутствуют.)

Если в матрице A_1^* встретилась строка с номером k , в которой все элементы $a_{kj}^{(1)} = 0$ равны нулю, а $a_k^{(1)} \neq 0$, то выполнение алгоритма останавливаем и делаем вывод, что система несовместна. Действительно, восстанавливая систему уравнений по расширенной матрице, получим, что k -е уравнение будет иметь вид

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_k^{(1)}$$

Этому уравнению не удовлетворяет ни один набор чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Матрицу A_1^* можно записать в виде:

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & B^* & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix},$$

где

$$B^* = \begin{pmatrix} a_{2i+1}^{(1)} & a_{2i+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{3i+1}^{(1)} & a_{3i+1}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mi+1}^{(1)} & a_{mi+1}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{pmatrix}.$$

По отношению к матрице B^* выполняем описанный шаг алгоритма. Получаем матрицу

$$B_1^* = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2j}^{(2)} & a_{2j+1}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{3j+1}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{mj+1}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{pmatrix},$$

где $j > i$, $a_{2j}^{(2)} \neq 0$. Эту матрицу снова можно записать в виде

$$B_1^* = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2j}^{(2)} & a_{2j+1}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & C^* & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix},$$

и к матрице C^* снова применим описанный выше шаг алгоритма.

Процесс останавливается, если после выполнения очередного шага новая уменьшенная матрица состоит из одних нулей или если исчерпаны все строки. Заметим, что заключение о несовместности системы могло остановить процесс и ранее.

Если бы мы не уменьшали матрицу, то в итоге пришли бы к матрице вида

$$\tilde{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j-1}^{(1)} & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1s-1}^{(1)} & a_{1s}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1j}^{(2)} & \dots & a_{1s-1}^{(2)} & a_{1s}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rs}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее выполняется так называемый обратный ход метода Гаусса. По матрице \tilde{A}^* составляем систему уравнений. В левой части оставляем неизвестные с номерами, соответствующими первым ненулевым элементам в каждой строке, то есть x_i, x_j, \dots, x_r .

Заметим, что ранг \tilde{A}^* равен рангу A . Остальные неизвестные переносим в правую часть. Считая неизвестные в правой части некоторыми фиксированными величинами, несложно выразить через них неизвестные левой части.

Теперь, придавая неизвестным в правой части произвольные значения и вычисляя значения переменных левой части, мы будем находить различные решения исходной системы $Ax = b$. Чтобы записать общее решение, нужно неизвестные в правой части обозначить в каком-либо порядке буквами C_1, C_2, \dots, C_{n-r} , включая и те неизвестные, которые явно не выписаны в правой части из-за нулевых коэффициентов, и тогда столбец неизвестных можно записать в виде столбца, где каждый элемент будет линейной комбинацией произвольных величин C_1, C_2, \dots, C_{n-r} (в частности, просто произвольной величиной C_k). Эта запись и будет общим решением системы. Здесь $r = \text{Rg } A$.

Если система была однородной, то получим общее решение однородной системы. Коэффициенты при C_1 , взятые в каждом элементе столбца общего решения, составят первое решение из фундаментальной системы решений, коэффициенты при C_2 – второе решение и т.д.

Фундаментальную систему решений однородной системы можно получить и другим способом. Для этого одной переменной, перенесенной в правую часть, нужно присвоить значение 1, а остальным – нули. Вычислив значения переменных в левой части, получим одно решение из фундаментальной системы. Присвоив другой переменной в правой части значение 1, а остальным – нули, получим второе решение из фундаментальной системы и так далее.

Задача 2.1

$$\begin{cases} 0.98x_1 + 0.88x_2 - 0.24x_3 = 1.36 \\ 0.16x_1 - 0.44x_2 - 0.88x_3 = -1.27 \\ 9.74x_1 - 10.0x_2 + 1.74x_3 = 5.31 \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений средствами MathCAD:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0.98 & 0.88 & -0.24 \\ 0.16 & -0.44 & -0.88 \\ 9.74 & -10.0 & 1.74 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1.36 \\ -1.27 \\ 5.31 \end{pmatrix} \quad \text{Записываем матрицу левой части и вектор правой части системы уравнений.}$$

$$\mathbf{X} := \text{lsolve}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

Получаем решение системы линейных уравнений, используя встроенную функцию MathCAD.

$$\mathbf{X}^T = (1.055 \quad 0.719 \quad 1.276)$$

Просматриваем результаты решения системы уравнений.

А теперь напомним функции реализующие решение системы уравнений методом Гаусса-Жордана:

$\text{Exchange}(C, i) := \left \begin{array}{l} k \leftarrow i + 1 \\ \text{while } C_{k,i} = 0 \\ \quad k \leftarrow k + 1 \\ \text{for } j \in 0.. \text{rows}(C) \\ \quad \left \begin{array}{l} S \leftarrow C_{i,j} \\ C_{i,j} \leftarrow C_{k,j} \\ C_{k,j} \leftarrow S \end{array} \right. \end{array} \right $	<p>Функция перестановки i-й и $i+1$-й строк матрицы:</p> <p>C – входная матрица,</p> <p>i – номер строки для перестановки.</p>
--	--

Следующая функция формирует расширенную матрицу системы C , которая является результатом склеивания матриц A и B , и приводит матрицу C к ступенчатой форме.

$\text{Simplex}(A, B) := \left \begin{array}{l} N \leftarrow \text{rows}(A) \\ C \leftarrow \text{augment}(A, B) \\ \text{for } i \in 0..N - 2 \\ \quad \left \begin{array}{l} C \leftarrow \text{Exchange}(C, i) \text{ if } C_{i,i} = 0 \\ \text{for } j \in 0..N \\ \quad C_{i,N-j} \leftarrow \frac{C_{i,N-j}}{C_{i,i}} \\ \text{for } m \in i + 1..N - 1 \\ \quad \left \begin{array}{l} \alpha \leftarrow C_{m,i} \\ \text{for } j \in i..N \\ \quad C_{m,j} \leftarrow C_{m,j} - \alpha \cdot C_{i,j} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right $	
--	--

Следующая функция осуществляет обратный ход метода Гаусса после приведения матрицы C к ступенчатой форме.

$$\text{Gauss}(\text{Simplex}, A, B) := \left\{ \begin{array}{l} C \leftarrow \text{Simplex}(A, B) \\ N \leftarrow \text{rows}(A) - 1 \\ V_N \leftarrow \frac{C_{N, N+1}}{C_{N, N}} \\ \text{for } j \in 1 \dots N \\ V_{N-j} \leftarrow \left(\frac{1}{C_{N-j, N-j}} \right) \cdot \left[C_{N-j, N+1} - \sum_{k=0}^{j-1} [C_{N-j, (N-k)} \cdot V_{N-k}] \right] \\ V \end{array} \right.$$

X1 := Gauss(Simplex, A, B)

Теперь вызываем нашу реализацию метода Гаусса.

X1^T = (1.055 0.719 1.276)

Просматриваем результаты решения системы уравнений.

Как видим результаты вычислений встроенными средствами MathCAD и результаты, полученные на основе представленной реализации метода Гаусса-Жордана, совпали.

Задача 2.2

Приведем решение тестового примера для системы линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными, представленного в [1].

$$\begin{cases} 7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 = 6.68 \\ 8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.8x_3 + 3.5x_4 = 9.95 \\ 4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 = 8.6 \\ 3.2x_1 - 1.4x_2 - 8.9x_3 + 3.3x_4 = 1 \end{cases}$$

Решение совпало с приведенным в [1].

Mathcad - [Гаусс тест по Демидовичу c278.xmcd]

Файл Редактировать Отображение Вставка Формат Инструменты Символы Окно Справка

Normal Arial 10 B I U

My Site Go

$$A := \begin{pmatrix} 7.9 & 5.6 & 5.7 & -7.2 \\ 8.5 & -4.8 & 0.8 & 3.5 \\ 4.3 & 4.2 & -3.2 & 9.3 \\ 3.2 & -1.4 & -8.9 & 3.3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 6.68 \\ 9.95 \\ 8.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Simplex}(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0.709 & 0.722 & -0.911 & 0.846 \\ 0 & 1 & 0.493 & -1.039 & -0.255 \\ 0 & 0 & 1 & -2.098 & -0.765 \\ 0 & 0 & 0 & -17.323 & -9.838 \end{pmatrix}$$

$$X1 := \text{Gauss}(\text{Simplex}, A, B) \quad X1 = \begin{pmatrix} 0.967 \\ 0.125 \\ 0.426 \\ 0.568 \end{pmatrix}$$

Задание № 3

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (3.1)$$

на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии

$$y(a) = c \quad (3.2)$$

и шаге интегрирования h :

- методом Эйлера;
- методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

Теоретические сведения**Метод Эйлера**

Метод Эйлера занимает в теории численных методов решения ОДУ ключевую позицию. При этом будем считать, что вычисления проводятся с **расчетным шагом**

$$h = \frac{b - x_0}{n},$$

расчетными *точками* (*узлами*) служат точки $x_i = x_0 + i \cdot h$, ($i = 0, 1, \dots, n$) промежутка $[x_0, b]$ и целью является нахождение функции в виде таблицы приближенных значений y_i решения $y=y(x)$ задачи в расчетных точках x_i

X	Y
x_0	y_0
x_1	y_1
...	...
$x_n \approx b$	$y_n \approx y(b)$

Пользуясь тем, что в точке x_0 известно значение решения $y(x_0)=y_0$, и значение его производной $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ (согласно (3.1)), можно записать уравнение касательной к графику искомой функции $y=y(x)$ в точке (x_0, y_0) :

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) \quad (3.3)$$

При достаточно малом шаге h ордината $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, полученная подстановкой в правую часть (3.3) значения $x_1 = x_0 + h$, по непрерывности должна мало отличаться от ординаты $y(x_1)$ решения $y(x)$ задачи (3.1). Следовательно, точка (x_1, y_1) пересечения касательной (3.3) с прямой $x=x_1$ может быть приближенно принята за новую начальную точку. Через эту точку снова проведем прямую $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$ которая уже приближенно отражает поведение касательной к $y=y(x)$ в точке $(x_1, y(x_1))$. Подставляя сюда $x = x_2, x_2 = x_1 + h$, иначе, пересекая эту «касательную» прямой $x=x_2$, получим приближение значения $y(x_2)$ значением $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, и т.д. В итоге этого процесса, определяемого формулой

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

и называемого *методом Эйлера*, получим график решения $y=y(x)$ данной задачи Коши (3.1)-(3.2) в виде приближенной ломанной, составленной из отрезков приближенных касательных (Рис. 3.1) откуда происходит другое название – *метод ломаных*.

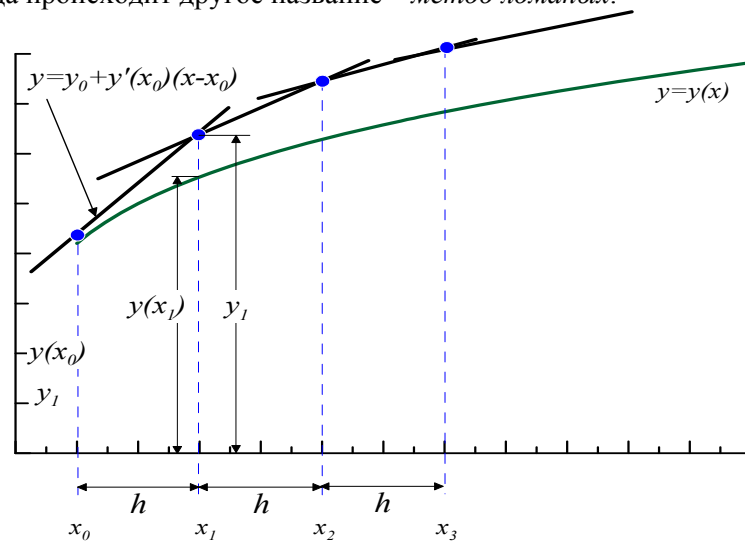


Рис.3.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера.

Анализ метода Эйлера показывает, что локальная ошибка дискретизации на одном шаге равна $O(h)$. Это обычно выражают утверждением, что метод Эйлера имеет **первый порядок**. Практическим следствием этого факта является ожидание того, что при уменьшении h приближённое решение будет всё более точным и при стремлении h к нулю будет сходиться к точному решению с линейной скоростью по h ; т.е. мы ожидаем, что при уменьшении шага h вдвое ошибка уменьшится примерно в два раза.

Очень медленная сходимость при уменьшении h характерна для методов первого порядка и служит препятствием для их использования.

Методы типа Рунге-Кутты

Как пример одного из подходов к построению методов, погрешность которых при стремлении h к нулю убывает с более высокой скоростью, мы рассмотрим **Метод Хьюна**, определяемый формулой

$$y_{k+1} = y_k + h[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))]$$

Обратите внимание, что мы просто заменили $f(x_k, y_k)$ в методе Эйлера на среднее значение функции f , вычисленных в двух различных точках. Метод Хьюна известен также как модифицированный метод Эйлера или **метод Рунге-Кутты** второго порядка и, имеет локальную ошибку дискретизации $O(h^2)$.

Наиболее используемым из методов Рунге-Кутты является классический метод четвёртого порядка, называемый «методом одной шестой», и задаваемый формулой

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)}{6},$$

где

$$F_1 = f(x_k, y_k),$$

$$F_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hF_1}{2}\right),$$

$$F_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hF_2}{2}\right),$$

$$F_4 = f(x_k + h, y_k + hF_3).$$

Здесь $f(x_k, y_k)$, использованное в методе Эйлера, заменено на среднее взвешенное значение f , вычисленных в четырёх различных точках.

Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка является одношаговым, также как и метод Эйлера, который иногда называют методом Рунге-Кутты первого порядка. Все такие методы могут быть представлены в общем виде как

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot g(x_k, y_k)$$

с соответствующей функцией g . В случае метода Эйлера функцией g является функцией f , в то время как для метода Хьюна

$$g(x, y) = [f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))].$$

Соответствующая функция для метода Рунге-Кутты четвёртого порядка может быть записана в аналогичном виде.

Задача 3.1

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \text{ где } f(x, y) = \frac{\cos(y)}{x+2} - 0.3y^2$$

на отрезке $[0, 1]$ при заданном начальном условии

$$y(0) = 0$$

и шаге интегрирования $h=0.1$:

- методом Эйлера;
- методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности;
- при помощи встроенных средств пакета MathCAD.

Сначала решим данное дифференциальное уравнение средствами пакета MathCAD с помощью встроенной функции Odesolve:

$$f(x, y) := \frac{\cos(y)}{x+2} + 0.3y^2$$

$$x0 := 0 \quad y0 := 0$$

Записываем правую часть дифференциального уравнения.

Записываем начальное условие $y(x0) = y0$.

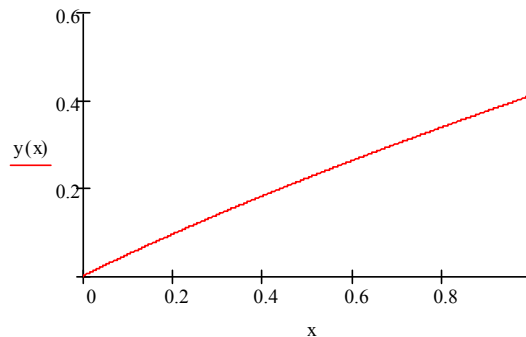
$x1 := 1$

Задаем конец отрезка
интегрирования.

$y'(x) = f(x, y(x))$

$y := \text{Odesolve}(x, x1)$

Решение $y(x)$ уравнения
относительно переменной x .



Результат
решения
уравнения в
виде графика

Теперь реализуем методы Эйлера и Рунге-Кутты 4-го порядка точности для решения уравнений и сравним полученные результаты:

$\text{EulerMethod}(F, a, b, y_0, h) :=$	$\begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ x \leftarrow a \\ y_0 \leftarrow y_0 \\ \text{while } x < b \\ \quad \left \begin{array}{l} y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot F(x, y_i) \\ x \leftarrow x + h \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ y \end{array}$	<p>Реализация метода Эйлера.</p> <p>Результат вычислений хранится в виде массива y.</p>
--	---	--

Функция для решения дифференциального уравнения имеет следующие входные параметры:

F – функция двух переменных $F(x, y)$;
 a – начальная точка интегрирования;

b – конечная точка интегрирования;
 y_0 – начальное условие (значение функции $y(a)$);
 h – шаг интегрирования.

$y1 := \text{EulerMethod}(f, 0, 1, 0, 0.05)$ Вызываем метод Эйлера с параметрами, заданными в условии задачи.

Аналогичным образом реализуем и вызываем метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

Результат вычислений хранится в виде массива y .

```
RungeKuttaMethod(F, a, b, y0, h) :=
  i ← 0
  x ← a
  y0 ← y0
  while x < b
    k1 ← h·F(x, yi)
    k2 ← h·F(x +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k1}{2}$ )
    k3 ← h·F(x +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k2}{2}$ )
    k4 ← h·F(x + h, yi + k3)
    yi+1 ← yi +  $\frac{k1 + 2k2 + 2k3 + k4}{6}$ 
    x ← x + h
    i ← i + 1
  y
```

Вызываем метод Рунге-Кутты с параметрами заданными в условии задачи:

$y2 := \text{RungeKuttaMethod}(f, 0, 1, 0, 0.05)$.

Теперь в массиве $y1$ хранятся результаты вычислений в расчетных точках, полученные методом Эйлера, в массиве $y2$

результаты, полученные при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

В массиве **y3** для сравнения представлены значения, полученные при помощи встроенных средств пакета MathCAD (процедура **rkfixed**, с порядком следования ее параметров разберитесь самостоятельно):

0	
0	0
1	0.05
2	0.0976
3	0.1432
4	0.1868
5	0.2288
6	0.2693
7	0.3086
8	0.3467
9	0.3839
10	0.4203

 $y1 =$

0	
0	0
1	0.0488
2	0.0954
3	0.1399
4	0.1827
5	0.2239
6	0.2638
7	0.3024
8	0.34
9	0.3767
10	0.4127

 $y2 =$

0	
0	0
1	0.0488
2	0.0954
3	0.1399
4	0.1827
5	0.2239
6	0.2638
7	0.3024
8	0.34
9	0.3767
10	0.4127

 $y3 =$

Литература

1. Б.П. Демидович, И.А. Марон Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. с. 276-278.
2. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в MathCAD . - СПб.: Питер, 2005-448 с.
3. С.В. Поршнев, И.В. Беленкова Численные методы на базе MathCAD. СПб.: БХВ-Петербург, 2005-456с.
4. Математика для экономистов на базе MathCAD/Черняк А.А. и др. –СПб.: БХВ-Петербург, 2003-496 с.
5. Решение инженерных задач на ЭВМ/:Практическое руководство /Шуп Терри Е. - М.: Мир, 1982-235 с.

Схема выбора варианта.

Вариант выбирается по номеру зачетной книжки, стоящему после знака /. Например, владелец зачетной книжки 417527/14 должен решать задачи с номером 14.

Прежде чем приступить к решению задач, Вам следует ознакомиться с теорией и примерами решения подобных задач, приведенными в различных учебниках.

Контрольная работа включает три задания.

Варианты задач к заданию №1

Отделить корни уравнения

$$F(x) = 0$$

графически и уточнить один из них:

- методом половинного деления;
- методом хорд;
- методом касательных;
- методом секущих;
- методом простой итерации;

с точностью $\varepsilon=0,001$.

Создать функции, реализующие указанные методы, построить графическую иллюстрацию методов, результаты проверить с помощью встроенных функций, оценить точность полученных значений.

Замечание.

Для обеспечения сходимости в методе простой итерации функцию $\varphi(x)$ следует искать из соотношения

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k},$$

считая, что $k \geq Q/2$, где $Q = \max|f'(x)|$.

Число k в промежутке $[a,b]$ имеет тот же знак, что и $f'(x)$.

1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
2. $0,5^x + 1 = (x - 2)^2$
3. $(x - 4)^2 \log_{0,5}(x - 3) = -1$
4. $x^2 \cos(2x) = -1$
5. $(x - 2)^2 2^x = -1$
6. $((x - 2)^2 - 1)2^x = 1$
7. $(x - 2) \cos x = 1,$
 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$
8. $(x - 2)^3 \lg(x + 11) = 1$
9. $5 \sin x = x - 1$
10. $x^4 3^x = 2$
11. $2 \lg x - \frac{x}{3} + 1 = 0$
12. $x - \sin x = 0,35$
13. $\sqrt{x} - \cos(0,374 + x) = 0$
14. $\sin(0,5 + x) = 2x - 0,5$
15. $\ln x + (x + 1)^3 = 0$
16. $3x - 2e^x = 1$
17. $2 \sin(x - 0,6) = 1,5 - x$
18. $5x - 8 \ln x = 8$
19. $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + x^2 = 4x - 3$
20. $1,8x^2 - \sin 10x = 0$
21. $\operatorname{ctg}(1,05 + x) - x^2 = 0$
22. $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$
23. $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,5x^2 - 1$
24. $2x^2 - 0,5^x - 3 = 0$
25. $\cos(x + 0,5) = x^3$
26. $2e^x = 5x + 2$
27. $\sin(x - 0,5) - x + 0,8 = 0$
28. $\operatorname{tg}^3 x = x - 1, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
29. $\operatorname{arctg}(x - 1) + 2x = 0$
30. $x = \sqrt{\lg(x + 2)}$
31. $x^2 - 5 + 0,4^{2x} = 0$
32. $\lg x - \frac{7}{2x + 6} = 0$
33. $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{5} = 1$
34. $0,5x + \lg(x - 1) = 0,5$
35. $\sin 0,5x + 1 = x^2$
36. $2x + \lg x = -0,5$
37. $(x - 2)^2 = \frac{1}{2}e^x$
38. $x = \sqrt{\lg(x + 2)} + 6$
39. $\sqrt{x + 1} = \frac{1}{x}$
40. $x^2 + 4 \sin x = 0$

Варианты задач к заданию №2

Решить систему уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса – Жордана, составить функции, реализующие этот метод, проверить решение с помощью встроенных функций пакета MathCAD.

1.
$$\begin{cases} 0,21x_1 - 0,45x_2 - 0,20x_3 = 1,97 \\ 0,30x_1 + 0,25x_2 + 0,43x_3 = 0,32 \\ 0,60x_1 - 0,35x_2 - 0,25x_3 = 1,83 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 1,53x_1 - 1,65x_2 - 0,76x_3 = 2,18 \\ 0,86x_1 + 1,17x_2 + 1,84x_3 = 1,95 \\ 0,32x_1 - 0,65x_2 + 1,11x_3 = -0,47 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 0,45x_1 - 0,94x_2 + 0,15x_3 = -0,15 \\ -0,01x_1 + 0,34x_2 + 0,06x_3 = 0,31 \\ -0,35x_1 + 0,05x_2 + 0,65x_3 = 0,37 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 0,63x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34 \\ 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,71x_3 = 0,42 \\ 0,03x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} -0,20x_1 + 1,60x_2 - 0,01x_3 = 0,03 \\ -0,30x_1 + 0,10x_2 - 1,50x_3 = 0,40 \\ 1,20x_1 - 0,20x_2 + 0,30x_3 = -0,60 \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} 0,30x_1x + 1,20x_2 - 0,20x_3 = -0,60 \\ -0,10x_1 - 0,20x_2 + 1,60x_3 = 0,30 \\ 0,50x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} 0,20x_1x + 0,44x_2 + 0,81x_3 = 0,74 \\ 0,58x_1 + 0,29x_2 + 0,05x_3 = 0,02 \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 14,38x_1 - 2,41x_2 + 1,39x_3 = 5,86 \\ 1,84x_1 + 25,36x_2 - 3,31x_3 = -2,28 \\ 2,46x_1 - 3,49x_2 + 16,37x_3 = 4,47 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} 2,34x_1 + 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41 \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44 \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56 \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,73x_2 - 9,11x_3 = -1,25 \\ 6,25x_1 + 2,32x_2 + 7,62x_3 = 2,33 \\ 1,13x_1 - 8,88x_2 + 4,64x_3 = -3,75 \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} 0,62x_1 + 0,92x_2 + 0,03x_3 = -0,82 \\ 0,99x_1 + 0,01x_2 + 0,07x_3 = 0,66 \\ 1,01x_1 - 0,02x_2 + 0,99x_3 = -0,98 \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} 0,10x_1 - 0,07x_2 - 0,96x_3 = -2,04 \\ 0,04x_1 - 0,99x_2 - 0,85x_3 = -3,73 \\ 0,91x_1 + 1,04x_2 + 0,19x_3 = -1,67 \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} 0,62x_1 + 0,84x_2 + 0,77x_3 = -8,18 \\ 0,03x_1 - 1,11x_2 - 1,08x_3 = 0,08 \\ 0,97x_1 + 0,02x_2 - 1,08x_3 = 0,06 \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} 0,63x_1 - 0,37x_2 + 1,76x_3 = -9,29 \\ 0,90x_1 + 0,99x_2 + 0,05x_3 = 0,12 \\ 0,13x_1 - 0,95x_2 + 0,69x_3 = 0,69 \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} 6,34x_1 + 11,75x_2 + 10x_3 = -41,40 \\ 7,42x_1 - 19,03x_2 + 11,75x_3 = -49,49 \\ 5,57x_1 + 7,48x_2 + 6,36x_3 = -27,67 \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} 0,13x_1 - 0,14x_2 - 2,00x_3 = 0,15 \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 + 0,77x_3 = 0,11 \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 = 0,12 \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} 56,43x_1 - 8,54x_2 + 6,36x_3 = 9,76 \\ 4,34x_1 + 49,87x_2 + 9,18x_3 = 43,48 \\ 6,75x_1 - 8,93x_2 + 48,88x_3 = 56,92 \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} 0,66x_1 + 0,44x_2 + 0,22x_3 = -0,58 \\ 1,54x_1 + 0,74x_2 + 1,54x_3 = -0,32 \\ 1,42x_1 + 1,42x_2 + 0,86x_3 = 0,83 \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} 0,78x_1 - 0,02x_2 - 0,12x_3 = 0,56 \\ 0,02x_1 - 0,86x_2 + 0,04x_3 = 0,77 \\ 0,12x_1 + 0,44x_2 - 0,72x_3 = 1,01 \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} -3x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 = -56,5 \\ 0,5x_1 - 6x_2 + 0,5x_3 = -100 \\ 6,5x_1 + 0,6x_2 - 3x_3 = -210 \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15 \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62 \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 - 0,67x_3 = 0,88 \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} 1,02x_1 + 0,72x_2 - 0,65x_3 = 1,27 \\ 0,74x_1 - 1,24x_2 - 1,73x_3 = 0,77 \\ 1,78x_1 + 2,32x_2 + 0,74x_3 = 1,16 \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} 4,03x_1 + 2,71x_2 - 2,32x_3 = -1,60 \\ -2,45x_1 + 5,28x_2 - 0,36x_3 = 5,36 \\ 1,42x_1 + 2,91x_2 + 12,37x_3 = 5,75 \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} -3,45x_1 - 1,25x_2 + 0,38x_3 = 5,01 \\ 2,15x_1 + 7,24x_2 - 0,39x_3 = 3,56 \\ 8,61x_1 + 12,94x_2 + 22,92x_3 = -4,7 \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} 0,98x_1 + 0,88x_2 - 0,24x_3 = 1,36 \\ 0,16x_1 - 0,44x_2 - 0,88x_3 = -1,27 \\ 9,74x_1 - 10x_2 + 1,74x_3 = -5,31 \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} 0,21x_1 - 0,94x_2 - 0,94x_3 = -0,25 \\ 0,98x_1 - 0,19x_2 + 0,93x_3 = 0,23 \\ 0,87x_1 + 0,56x_2 - 0,14x_3 = 0,33 \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} 3,43x_1 + 4,07x_2 - 1,06x_3 = 46,08 \\ 74,4x_1 + 1,84x_2 - 1,85x_3 = -26,5 \\ 3,34x_1 + 94,3x_2 + 1,02x_3 = 92,3 \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} 0,72x_1 + 3,54x_2 + 7,28x_3 = 0,33 \\ -0,28x_1 - 0,72x_2 + 3,34x_3 = 0,22 \\ 1,00x_1 + 0,35x_2 - 0,78x_3 = 1,12 \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} 0,34x_1 + 0,71x_2 + 0,63x_3 = 2,08 \\ 0,71x_1 - 0,65x_2 - 0,17x_3 = 0,18 \\ 1,18x_1 - 2,35x_2 + 0,75x_3 = 1,28 \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} 0,21x_1 - 0,18x_2 + 0,75x_3 = 0,11 \\ 0,13x_1 + 0,75x_2 - 0,11x_3 = 2,01 \\ 3,01x_1 - 0,33x_2 + 0,11x_3 = 0,13 \end{cases}$$
31.
$$\begin{cases} 3,75x_1 - 0,28x_2 + 0,17x_3 = 0,75 \\ 2,11x_1 - 0,11x_2 - 0,12x_3 = 1,11 \\ 0,22x_1 - 3,17x_2 + 1,81x_3 = 0,05 \end{cases}$$
32.
$$\begin{cases} 3,14x_1 - 2,12x_2 + 1,17x_3 = 1,27 \\ -2,12x_1 + 1,32x_2 - 2,45x_3 = 2,13 \\ 1,17x_1 - 2,45x_2 + 1,18x_3 = 3,14 \end{cases}$$
33.
$$\begin{cases} 1,65x_1 - 2,27x_2 + 0,18x_3 = 2,25 \\ -2,27x_1 + 1,73x_2 - 0,46x_3 = 0,93 \\ 0,18x_1 - 0,46x_2 + 2,16x_3 = 1,33 \end{cases}$$
34.
$$\begin{cases} 2,45x_1 + 1,75x_2 - 3,24x_3 = 1,23 \\ 1,75x_1 - 1,16x_2 + 2,18x_3 = 3,43 \\ -3,24x_1 + 2,18x_2 - 1,85x_3 = -0,16 \end{cases}$$
35.
$$\begin{cases} -5,24x_1 + 2,66x_2 - 2,39x_3 = 9,11 \\ 2,47x_1 + 8,20x_2 + 2,31x_3 = 7,76 \\ 5,45x_1 - 6,27x_2 + 9x_3 = -9,37 \end{cases}$$
36.
$$\begin{cases} -3,3x_1 + 2,1x_2 - 4,3x_3 = -0,21 \\ 4x_1 - 3,2x_2 + 5x_3 = 6 \\ 2x_1 + 1,23x_2 + 3,5x_3 = 1,2 \end{cases}$$
37.
$$\begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,01 \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7 \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,89x_3 = 7,37 \end{cases}$$
38.
$$\begin{cases} 3,23x_1 + 1,62x_2 + 0,65x_3 = 1,28 \\ 1,62x_1 - 2,33x_2 - 1,43x_3 = 0,87 \\ 0,65x_1 - 1,43x_2 + 2,18x_3 = -2,87 \end{cases}$$
39.
$$\begin{cases} 5,4x_1 - 2,46x_2 + 3,9x_3 = 5,51 \\ 2,57x_1 + 6,28x_2 - 1,3x_3 = 4,45 \\ 2,71x_1 - 0,76x_2 + 1,59x_3 = -3,57 \end{cases}$$
40.
$$\begin{cases} 0,9x_1 + 2,7x_2 - 3,9x_3 = 2,41 \\ 2,51x_1 + 5,86x_2 - 0,5x_3 = 3,96 \\ 4,45x_1 - 2,57x_2 + 3,9x_3 = -1,28 \end{cases}$$

Варианты задач к заданию №3

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при начальном заданном условии $y(a) = c$ и шаге интегрирования h :

1. методом Эйлера;
2. методом Рунге – Кутты 4 – го порядка точности.

3. проверить решение с помощью встроенных функций пакета MathCAD rkfid (Rkadapt).

В решении оставлять 5 цифр после запятой.

№ вари- анта	Функция	Интер- вал	y_0	Шаг
1	$f(x, y) = 3x^2 + 0,1xy$	[0;1]	$y(0)=0,2$	0,1
2	$f(x, y) = 0,185(x^2 + \cos(0,7x)) + 1,843y$	[0,2;1,2]	$y(0,2)=0,25$	0,1
3	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{3}\right)$	[1,6;2,6]	$y(1,6)=4,6$	0,1
4	$f(x, y) = x + \sin\left(\frac{y+1}{\sqrt{13}}\right)$	[0,2;1,2]	$y(0,2)=1,1$	0,1
5	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{e}\right)$	[1,4;2,4]	$y(1,4)=2,5$	0,1
6	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$	[1,7;2,7]	$y(1,7)=5,3$	0,1
7	$f(x, y) = -3y^2 + \sqrt{4x^2 + 1}$	[2,6;4,6]	$y(2,6)=3,5$	0,2
8	$f(x, y) = 2 - \sin^2(x + y)$	[2;3]	$y(2)=2,3$	0,1
9	$f(x, y) = 1,6x + 0,5y^2$	[0;1]	$y(0)=0,3$	0,1
10	$f(x, y) = x - \cos\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)$	[1,8;2,8]	$y(1,8)=2,6$	0,1
11	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{11}}\right)$	[2,1;3,1]	$y(2,1)=2,5$	0,1
12	$f(x, y) = e^{2x} + 0,25y^2$	[0;0,5]	$y(0)=2,6$	0,05
13	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$	[-2;-1]	$y(-2)=3$	0,1
14	$f(x, y) = 0,133(x^2 + \sin 2x) + 0,872y$	[0,2;1,2]	$y(0,2)=0,25$	0,1
15	$f(x, y) = \sin(x + y) + 1,5$	[1,5;2,5]	$y(1,5)=4,5$	0,1
16	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{1,25}\right)$	[0,4;1,4]	$y(0,4)=0,8$	0,1
17	$f(x, y) = 2,5x + \cos(y + 0,6)$	[1;3]	$y(1)=1,5$	0,2
18	$f(x, y) = \cos(1,5y + x)^2 + 1,4$	[1;2]	$y(1)=1,5$	0,1
19	$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^3y} + 2y$	[1,5;2]	$y(1,5)=2,1$	0,05

20	$f(x, y) = \cos(y) + 3x$	[0;2]	$y(0)=1,3$	0,1
21	$f(x, y) = \cos(1,5x - y^2) - 1,3$	[-1;1]	$y(-1)=0,2$	0,2
22	$f(x, y) = x + \sin\left(\frac{y}{3}\right)$	[1,6;2,6]	$y(1,6)=4,6$	0,1
23	$f(x, y) = e^{-(y-1)} + 2x$	[0;0,5]	$y(0)=0,3$	0,05
24	$f(x, y) = 1 + 2y \sin x - y^2$	[1;2]	$y(1)=0$	0,1
25	$f(x, y) = \frac{\cos y}{x+2} - 0,3y^2$	[0;1]	$y(0)=0$	0,1
26	$f(x, y) = 0,166(x^2 + \sin(1,1x)) + 0,883y$	[0,2;1,2]	$y(0,2)=0,25$	0,1
27	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y+x}{\pi}\right)$	[1,7;2,7]	$y(1,7)=5,6$	0,1
28	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{e}\right)$	[1,4;2,4]	$y(1,4)=2,5$	0,1
29	$f(x, y) = x + \sin\left(\frac{y}{\sqrt{10}}\right)$	[0,6;1,6]	$y(0,6)=0,8$	0,1
30	$f(x, y) = y + \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$	[1;2]	$y(1)=5,9$	0,1
31	$f(x, y) = 1 + 0,8y \sin x - 2y^2$	[0;1]	$y(0)=0$	0,1
32	$f(x, y) = x + \sin\left(\frac{y}{2,5}\right)$	[0,5;1,5]	$y(0,5)=1,8$	0,1
33	$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{1,3}}\right)$	[1,2;2,2]	$y(1,2)=1,8$	0,1
34	$f(x, y) = 1 + 2,2 \sin x + 1,5y^2$	[0;1]	$y(0)=0$	0,1
35	$f(x, y) = \frac{\cos y}{1,5+x} - 1,2y^2$	[0;1]	$y(0)=0$	0,1
36	$f(x, y) = \cos(x-y) + \frac{1,25y}{1,5} + x$	[0;1]	$y(0)=0$	0,1
37	$f(x, y) = \cos(x-y) + \frac{1,25y}{1,5+x}$	[0;1]	$y(0)=0$	0,1
38	$f(x, y) = 0,2x^2 + y^2$	[0;1]	$y(0)=0,8$	0,1
39	$f(x, y) = x^2 + y$	[0;1]	$y(0)=0,4$	0,1
40	$f(x, y) = xy + 0,1y^2$	[0;1]	$y(0)=0,5$	0,1