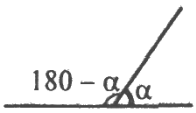
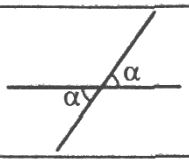
ПЛАНИМЕТРИЯ

Углы

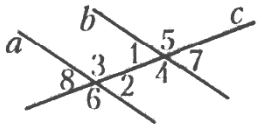
Смежные углы		Сумма смежных углов равна 180°
Вертикальные углы		Вертикальные углы равны

Параллельные прямые

Накрест лежащие углы равны
($\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 5 = \angle 6$; $\angle 7 = \angle 8$).
Соответственные углы равны
($\angle 1 = \angle 8$; $\angle 2 = \angle 7$; $\angle 3 = \angle 5$; $\angle 4 = \angle 6$).
Сумма односторонних углов равна 180°
($\angle 1 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 6 + \angle 7 = 180°$).

$\Leftrightarrow$

Прямые a и b параллельны, прямая c – секущая



Обобщенная теорема Фалеса

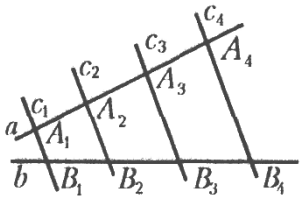
Если на одной из двух прямых отложены несколько отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то

$\Rightarrow$

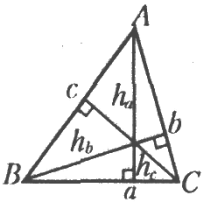
на второй прямой высекутся отрезки, пропорциональные данным.

$c_1 \parallel c_2 \parallel c_3 \parallel c_4$

$A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_2B_3 : B_3B_4$



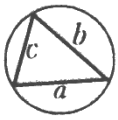
Площадь треугольника



$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;

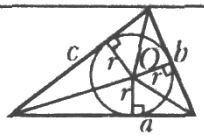
$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C = \frac{1}{2}bc\sin\angle A = \frac{1}{2}ac\sin\angle B$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.



$S = \frac{abc}{4R}$,

где R – радиус описанной окружности.



$S = pr$,

где $p = \frac{a+b+c}{2}$, а r – радиус вписанной окружности.

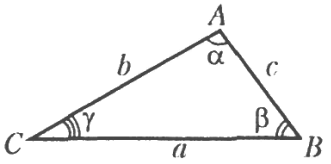
Метрические соотношения для треугольников

Сумма внутренних углов: $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

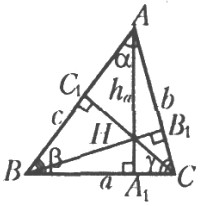
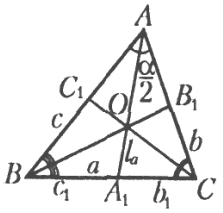
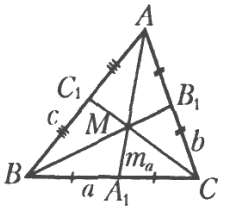


Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$,

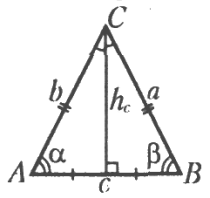
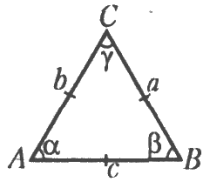
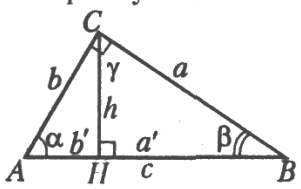
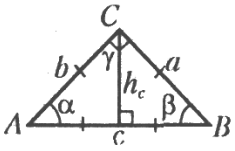
где R – радиус описанной окружности.

Неравенство треугольника: $a-b<c<a+b$; $b-c<a<b+c$; $a-c<b<a+c$.

Высоты, биссектрисы, медианы треугольника

	Высоты	***Биссектрисы***	***Медианы***
			
Точка пересечения	H – ортоцентр	O – **центр вписанной окружности** $\dfrac{AO}{OA_1}=\dfrac{b+c}{a}$; $\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{a+c}{b}$; $\dfrac{CO}{OC_1}=\dfrac{a+b}{c}$	M – центр масс $\dfrac{AM}{MA_1}=\dfrac{BM}{MB_1}=$ $=\dfrac{CM}{MC_1}=\dfrac{2}{1}$
Длина	$h_a=b\sin\gamma=c\sin\beta$; $h_a=\dfrac{2S}{a}$	$l_a=\dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$; $l_a^2=bc-b_1c_1$; $l_a^2=bc-\dfrac{bca^2}{(b+c)^2}$	$m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$
Свойства	$h_a:h_b:h_c=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}$	$\dfrac{c_1}{b_1}=\dfrac{c}{b}$; $\dfrac{S_{\Delta AA_1B}}{S_{\Delta AA_1C}}=\dfrac{AB}{AC}$; $b_1=\dfrac{ab}{b+c}$; $c_1=\dfrac{ac}{b+c}$	$S_{\Delta ABA_1}=S_{\Delta ACA_1}$; $S_{\Delta BMA_1}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ABC}$

Частные случаи треугольников

Вид треугольника	***Основные свойства и соотношения между элементами***
Равнобедренный 	$a=b;\ \alpha=\beta$; $h_a=h_b=\frac{2S}{a}$; $h_c=m_c=l_c=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2}$; $r=\frac{c}{2}tg\frac{\alpha}{2}$; $R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{c}{2\sin\gamma}$
Равносторонний 	$a=b=c$; $\alpha=\beta=\gamma=60°$; $h_a=h_b=h_c=m_a=m_b=m_c=l_a=l_b=l_c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $R=2r$; $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Прямоугольный 	$\gamma=\alpha+\beta=90°$; ***Теорема Пифагора:*** $c^2=a^2+b^2$; ΔCBH " ΔACH " ΔABC ; $a^2=ca'$; $b^2=cb'$; $h^2=a'b'$; $\sin\alpha=\frac{a}{c}=\cos\beta$; $\cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\mathrm{ctg}\beta$; $\mathrm{tg}\beta=\frac{b}{a}=\mathrm{ctg}\alpha$; $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$; $m_c=\frac{1}{2}c$; $h_a=b$; $h_b=a$; $h_c=\frac{ab}{c}=h$; $r=\frac{a+b-c}{2}$; $R=\frac{c}{2}$; $2(R+r)=a+b$; $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch$
Прямоугольный равнобедренный 	$\gamma=90°$; $\alpha=\beta=45°$; $a=b$; $c=a\sqrt{2}$; $m_a=m_b=\frac{a\sqrt{5}}{2}$; $m_c=h_c=l_c=\frac{c}{2}$; $S=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}c^2$

Обозначения, используемые в таблице:

a , b , c – стороны треугольника ABC ; α , β , γ – соответственно противолежащие этим сторонам углы;

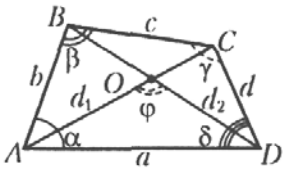
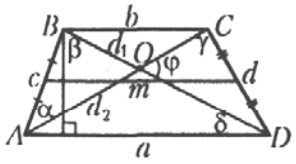
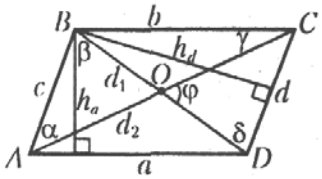
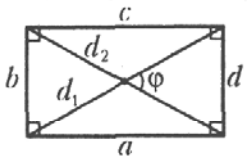
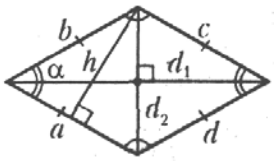
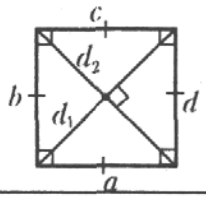
h_a , m_a , l_a – высота, медиана, биссектриса, проведенные к стороне a ;

a' – проекция a на c ; b' – проекция b на c ;

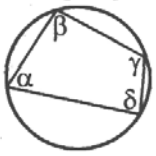
r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности;

S – площадь треугольника.

Четырехугольники

Вид четырехугольника	***Основные соотношения***	***Площадь***
Выпуклый 	$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$; $S_{\Delta AOB}\cdot S_{\Delta COD}=S_{\Delta BOC}\cdot S_{\Delta AOD}$	$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Трапеция 	$a\parallel b$; $m\parallel a$; $m\parallel b$; m – средняя линия; $m=\frac{a+b}{2}$; $\alpha+\beta=\gamma+\delta=180°$; $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD}$; $S_{\Delta ABO}=S_{\Delta CDO}$; $S_{\Delta AOD}:S_{\Delta COB}=a^2:b^2$	$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$; $S=m\cdot h$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Параллелограмм 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=c$; $b=d$; $\alpha=\gamma$; $\beta=\delta$; $\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\delta+\alpha=180°$; $AO=OC$; $BO=OD$; $d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)$; $\Delta ABC=\Delta CDA$; $\Delta ABD=\Delta CDB$; $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COD}=S_{DOA}$	$S=ah_a=dh_d$; $S=ab\sin\alpha$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
Прямоугольник 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=c$; $b=d$; $a\perp b$; $\alpha=\beta=\gamma=\delta=90°$; $d_1=d_2$; $d_1^2=a^2+b^2$; $R=\frac{d_1}{2}$	$S=ab$; $S=\frac{1}{2}d_1^2\sin\varphi$
Ромб 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=b=c=d$; $\alpha=\gamma$; $\beta=\delta$; $d_1\perp d_2$; диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба; $r=\frac{h}{2}$	$S=ah$; $S=a^2\sin\alpha$; $S=\frac{1}{2}d_1d_2$
Квадрат 	$a\parallel c$; $b\parallel d$; $a=b=c=d$; $\alpha=\beta=\gamma=\delta=90°$; $d_1=d_2$; $d_1\perp d_2$; $d_1=a\sqrt{2}$; $r=\frac{a}{2}$, $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$S=a^2$; $S=\frac{1}{2}d_1^2$

Вписанные и описанные четырехугольники

Вписанный четырехугольник	***Описанный четырехугольник***
 $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$ $\Leftrightarrow$ ***четырехугольник вписан в окружность***	 $a+c=b+d$ $\Leftrightarrow$ ***четырехугольник описан около окружности;*** $S=pr$, где $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$, r – радиус

Правильные многоугольники

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой.

Обозначения: a_n – сторона, r_n – радиус вписанной окружности, R_n – радиус описанной окружности, P_n – периметр, S_n – площадь, α_n – угол между смежными сторонами.	$\alpha_n=\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$
	$r_n=\dfrac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}=R_n\cos\dfrac{180^\circ}{n}$
	$R_n=\dfrac{r_n}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}=\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$
	$S_n=\dfrac{n}{2}R_n^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}=\dfrac{n}{4}a_n^2\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}=\dfrac{1}{2}r_n\cdot P_n$

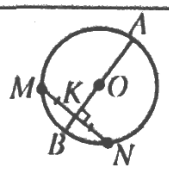
Формулы для правильных многоугольников с числом сторон 3, 4, 6, 8

n	α	r	R	S	Соотношение между r и R
3	60°	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R=2r$
4	90°	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$	$R=r\sqrt{2}$
6	120°	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R\sqrt{3}=2r$
8	135°	$\dfrac{a\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\dfrac{r}{R}=\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

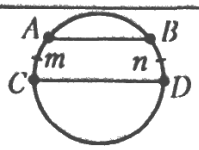
Элементы	***Правильный n-угольник***	
	вписанный в окружность радиуса R	***описанный около окружности радиуса*** r
Сторона	$a=2R\sin\dfrac{\pi}{n}$	$a=2r\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$
Периметр	$P=2nR\sin\dfrac{\pi}{n}$	$P=2nr\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$
Площадь	$S=\dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$	$S=nr^2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$

Центральные и вписанные углы

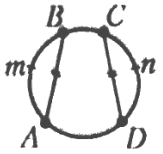
Свойства дуг и хорд



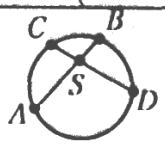
$(AB \perp MN) \Leftrightarrow (MK = KN)$



$(AB \parallel CD) \Leftrightarrow \left(\overset{\smile}{AmB} = \overset{\smile}{CnD}\right)$



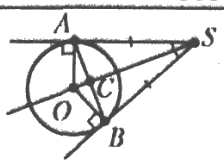
$\left(\overset{\smile}{AmB} = \overset{\smile}{CnD}\right) \Leftrightarrow (AB = CD)$



$AS \cdot SB = CS \cdot SD$

ΔASC и ΔDSB подобны

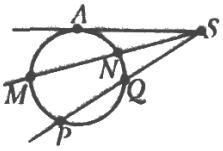
Свойства касательных и секущих



SA, SB – касательные,

$AS = SB$;

$\angle ASO = \angle BSO = \angle OAB = \angle OBA$

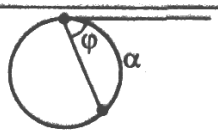


SM, SP – секущие, SA – касательная,

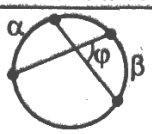
$SM \cdot SN = SP \cdot SQ$; $SM \cdot SN = SA^2$;

ΔSAN " ΔSMA; ΔSNQ " ΔSPM

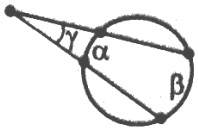
Углы между хордами, касательными и секущими



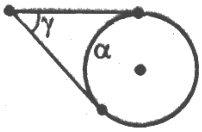
$\varphi = \frac{\alpha}{2}$



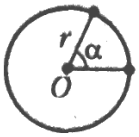
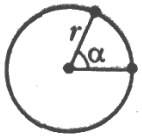
$\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$



$\gamma = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$



$\gamma = 180° - \alpha$

Длина дуги (l) и окружности (L)	Площадь	
	круга	сектора
 $l = \frac{\pi r \alpha°}{180°}$ – длина дуги величины α градусов и радиуса r. $L = 2\pi r$ – длина окружности радиуса r	 $S = \pi r^2$ – площадь круга радиуса r	 $S = \frac{\pi r^2 \alpha°}{360°}$ – площадь сектора с углом α градусов и радиуса r