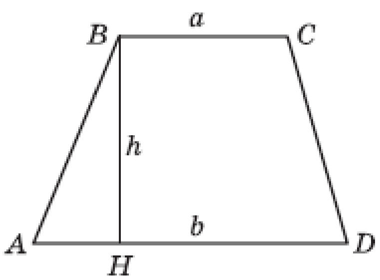
Решаем задачи по геометрии: решение четырехугольников на ЦТ по математике

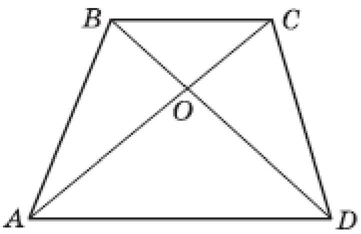
Теорема 1. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



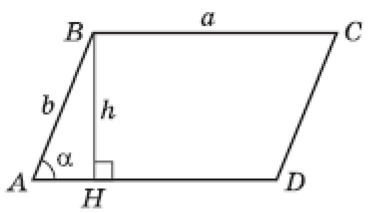
Теорема 2. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых подобны, а два другие имеют одинаковую площадь:

$$\Delta\, BOC \sim \Delta\, DOA;\;\; S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CDO}.$$



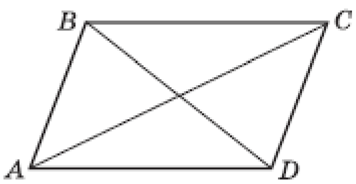
Теорема 3. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, опущенную на данное основание, или произведению двух сторон на синус угла между ними:

$$S_{ABCD} = ah = ab\sin\alpha.$$



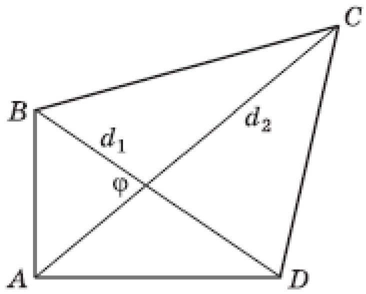
Теорема 4. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон:

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$



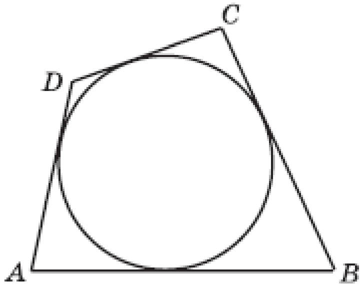
Теорема 5. Площадь произвольного выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi.$$



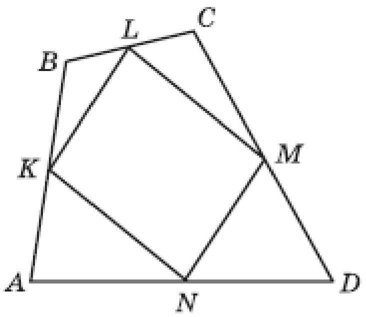
Теорема 6. Площадь четырехугольника, описанного около окружности, равна произведению полупериметра этого четырехугольника на радиус данной окружности:

$$S_{ABCD} = p \cdot r.$$



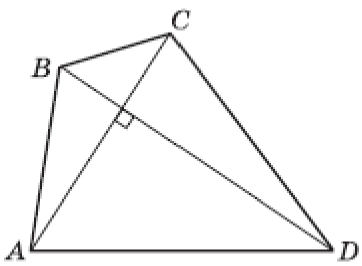
Теорема 7. Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, есть параллелограмм, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника:

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$



Теорема 8. Если у выпуклого четырехугольника диагонали взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон этого четырехугольника равны:

$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.



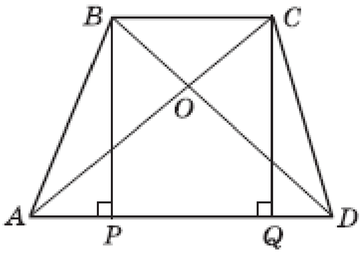
Доказательства некоторых теорем

Доказательство теоремы 2. Пусть ABCD — данная трапеция, AD и BC — ее основания, O — точка пересечения диагоналей AC и BD этой трапеции. Докажем, что треугольники AOB и COD имеют одинаковую площадь. Для этого опустим из точек B и C на прямую AD перпендикуляры BP и CQ. Тогда площадь треугольника ABD равна

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BP,$$

а площадь треугольника ACD равна $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CQ.$

Так как BP = CQ, то и $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD}$. Но площадь треугольника AOB есть разность площадей треугольников ABD и AOD, а площадь треугольника COD — разность площадей треугольников ACD и AOD. Следовательно, площади треугольников AOB и COD равны, что и требовалось доказать.



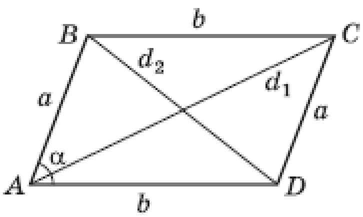
Доказательство теоремы 4. Пусть ABCD — параллелограмм, AB = CD = a, AD = BC = b, AC = d_1, BD = d_2, ∠BAD = α, ∠ADC = 180° – α. Применим к треугольнику ABD теорему косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Применив теперь теорему косинусов к треугольнику ACD, получим:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Складывая почленно полученные равенства, получаем, что $2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2,$ что и требовалось доказать.



Доказательство теоремы 5. Пусть ABCD — произвольный выпуклый четырехугольник, E — точка пересечения его диагоналей, AE = a, BE = b,
CE = c, DE = d, ∠AEB = ∠CED = ϕ, ∠BEC =
= ∠AED = 180° – ϕ. Имеем:

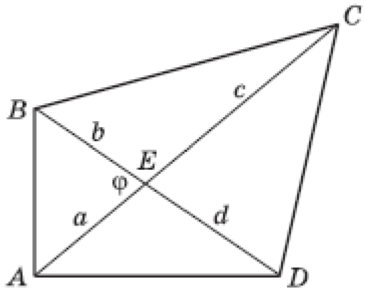
$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta BEC} + S_{\Delta CED} + S_{\Delta AED} =$$

$$= \frac{1}{2} AE \cdot BE \cdot \sin \angle AEB + \frac{1}{2} BE \cdot CE \cdot \sin \angle BEC +$$

$$+ \frac{1}{2} CE \cdot DE \cdot \sin \angle CED + \frac{1}{2} AE \cdot DE \cdot \sin \angle AED =$$

$$= \frac{\sin \varphi}{2} \cdot (ab + bc + cd + ad) = \frac{\sin \varphi}{2} \cdot (a+c)(b+d) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi,$$

что и требовалось доказать.



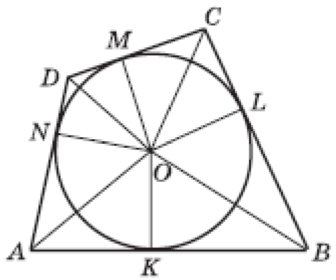
Доказательство теоремы 6. Пусть ABCD — произвольный четырехугольник, описанный около окружности, O — центр этой окружности, OK, OL, OM и ON — перпендикуляры, опущенные из точки O на прямые AB, BC, CD и AD соответственно. Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot OK + \frac{1}{2} BC \cdot OL + \frac{1}{2} CD \cdot OM + \frac{1}{2} AD \cdot ON =$$

$$= \frac{r}{2}(AB + BC + CD + AD) = pr,$$

где r — радиус окружности, а p — полупериметр четырехугольника ABCD.

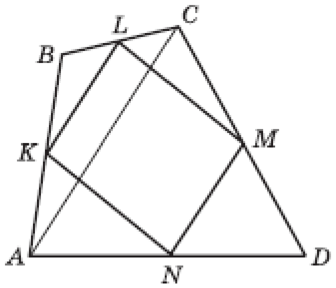


Доказательство теоремы 7. Пусть ABCD — произвольный выпуклый четырехугольник, K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Так как KL — средняя линия треугольника ABC, то прямая KL параллельна прямой AC и $KL = \frac{1}{2} AC.$ Аналогично, прямая MN параллельна прямой AC и $MN = \frac{1}{2} AC.$ Следовательно, KLMN — параллелограмм. Рассмотрим треугольник KBL. Его площадь равна четверти площади треугольника ABC. Площадь треугольника MDN также равна четверти площади треугольника ACD. Следовательно, $S_{\Delta KBL} + S_{\Delta MDN} = \frac{1}{4}\left(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}\right) = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$

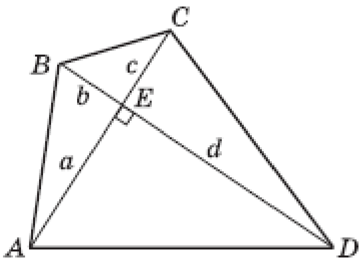
Аналогично, $S_{\Delta AKN} + S_{\Delta LCM} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$

Это значит, что $S_{\Delta KBL} + S_{\Delta MDN} + S_{\Delta AKN} + S_{\Delta LCM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$,

откуда вытекает, что $S_{KLMN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

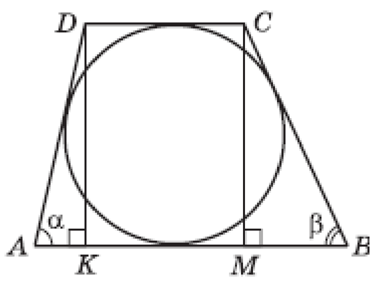


Доказательство теоремы 8. Пусть ABCD — произвольный выпуклый четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, пусть E — точка пересечения его диагоналей,
AE = a, BE = b, CE = c, DE = d. Применим к треугольникам ABE и CDE теорему Пифагора:
$AB^2 = AE^2 + BE^2 = a^2 + b^2$,
$CD^2 = CE^2 + DE^2 = c^2 + d^2$,
следовательно,
$AB^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
Применив теперь теорему Пифагора к треугольникам ADE и BCE, получим:
$AD^2 = AE^2 + DE^2 = a^2 + d^2$,
$BC^2 = BE^2 + CE^2 = b^2 + c^2$,
откуда вытекает, что
$AD^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
Значит, $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, что и требовалось доказать.



Решения задач

Задача 1. Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.



Решение. Пусть ABCD — данная трапеция, AB и CD — ее основания, DK и CM — перпендикуляры, опущенные из точек C и D на прямую AB. Искомое отношение не зависит от радиуса круга. Поэтому будем считать, что радиус равен 1. Тогда площадь круга равна π, найдем площадь трапеции. Так как треугольник ADK прямоугольный, то

$$AD = \frac{DK}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника BCM находим, что $BC = \frac{2}{\sin\beta}$. Поскольку в данную трапецию можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны: AB + CD = AD + BC,

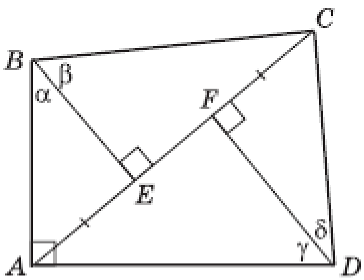
откуда находим $AB + CD = \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta} = \frac{2(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}$.

Значит, площадь трапеции есть $S = \frac{1}{2}(AB + CD)\cdot DK = \frac{2(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}$,

и искомое отношение равно $\frac{2(\sin\alpha + \sin\beta)}{\pi\sin\alpha\,\sin\beta}$.

Ответ: $\frac{2(\sin\alpha + \sin\beta)}{\pi\sin\alpha\,\sin\beta}$.

Задача 2. В выпуклом четырехугольнике ABCD угол A равен 90°, а угол C не превосходит 90°. Из вершин B и D на диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Известно, что AE = CF. Доказать, что угол C прямой.



Доказательство. Так как угол A равен 90°,
а угол C не превосходит 90°, то точки E и F лежат на диагонали AC. Без ограничения общности мы можем считать, что AE < AF (в противном случае следует повторить все нижеследующие рассуждения с заменой точек B и D). Пусть ∠ABE = α,
∠EBC = β, ∠FDA = γ, ∠FDC = δ. Нам достаточно доказать, что α + β + γ + δ = π. Так как

$$\frac{\pi}{2} = \angle BAD = \angle BAE + \angle FAD =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \pi - \alpha - \gamma,$$

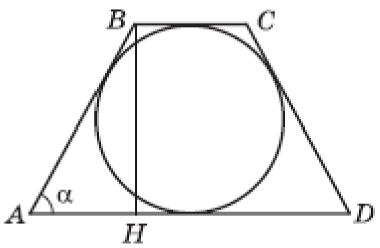
то $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ и в частности tg α tg γ = 1. Далее, имеем:

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta=\frac{CE}{BE}\cdot\frac{CF}{DF}=\frac{AF}{BE}\cdot\frac{AE}{DF}=$$
$$=\frac{AF}{DF}\cdot\frac{AE}{BE}=\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1,$$

откуда получаем, что $\beta+\delta=\frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

Задача 3. Периметр равнобочной трапеции, описанной около круга, равен p. Найти радиус этого круга, если известно, что острый угол при основании трапеции равен α.
Решение. Пусть ABCD — данная равнобочная трапеция с основаниями AD и BC, пусть BH — высота этой трапеции, опущенная из вершины B.
Так как в данную трапецию можно вписать окружность, то $AB+CD=BC+AD=\frac{p}{2}$,

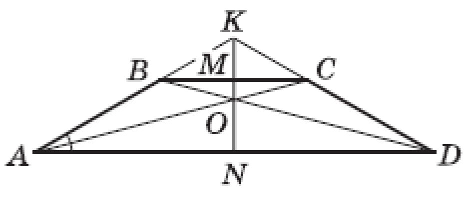
следовательно, $AB=CD=\frac{p}{4}$.



Из прямоугольного треугольника ABH находим,
$BH=AB\cdot\sin\angle BAD\Leftrightarrow 2r=\frac{p\sin\alpha}{4}\Leftrightarrow r=\frac{p\sin\alpha}{8}$.

Ответ: $\frac{p\sin\alpha}{8}$.

Задача 4. Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а прямые AB и CD — в точке K. Прямая KO пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно, а угол BAD равен 30°. Известно, что в трапеции ABMN и NMCD можно вписать окружность. Найти отношение площадей треугольника BKC и трапеции ABCD.



Решение. Как известно, для произвольной трапеции прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон, делит каждое из оснований пополам. Итак, BM = MC и AN = ND. Далее, так как в трапеции ABMN и NMCD можно вписать окружность, то
BM + AN = AB + MN,
MC + ND = CD + MN.
Отсюда следует, что AB = CD, то есть трапеция ABCD — равнобокая. Искомое отношение площадей не зависит от масштаба, поэтому мы можем принять, что KN = x, KM = 1. Из прямоугольных треугольников AKN и BKM получаем, что

$AK = 2x,\ AN = x\sqrt{3},\ BK = 2,\ BM = \sqrt{3}.$ Записывая вновь уже использованное выше соотношение
BM + AN = AB + MN ⇔

$$BM + AN = AB + MN \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3} + x\sqrt{3} = (2x-2) + (x-1),$$

находим $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$

Нам требуется вычислить отношение:

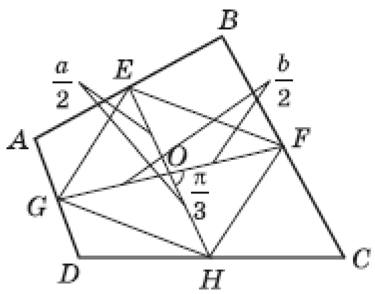
$$\frac{S_{\Delta\ BKC}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\Delta\ BKC}}{S_{\Delta\ AKD} - S_{\Delta\ BKC}} = \frac{1}{\dfrac{S_{\Delta\ AKD}}{S_{\Delta\ BKC}} - 1} = \frac{1}{x^2-1} =$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)^2 - 1} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что площади треугольников AKD и BKC относятся как квадраты сторон KN и KM, то есть как x2.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}.$

Задача 5. В выпуклом четырехугольнике ABCD точки E, F, H, G являются серединами сторон AB, BC, CD, DA соответственно и O — точка пересечения отрезков EH и FG. Известно, что EH = *a*, FG = b, $\angle FOH = \dfrac{\pi}{3}.$ Найти длины диагоналей четырехугольника.



Решение. Известно, что если соединить последовательно середины сторон произвольного четырехугольника, то получится параллелограмм. В нашем случае EFHG — параллелограмм и O — точка пересечения его диагоналей. Тогда

$$EO = OH = \frac{a}{2},\ \ GO = OF = \frac{b}{2}.$$

Применим к треугольнику FOH теорему косинусов:

$$FH = \sqrt{OF^2 + OH^2 - 2OF \cdot OH \cdot \cos\angle FOH} = \frac{\sqrt{a^2+b^2-ab}}{2}.$$

Так как FH — средняя линия треугольника BCD, то $BD = 2FH = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}.$

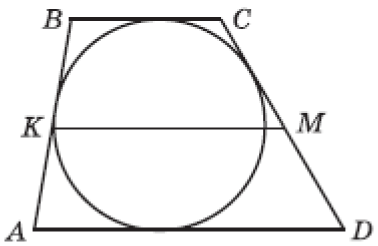
Аналогично, применив теорему косинусов к треугольнику EFO, получим, что

$$EF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + ab},$$

откуда $AC = 2EF = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}.$

Ответ: $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}.$

Задача 6. Боковые стороны трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найти основания трапеции.



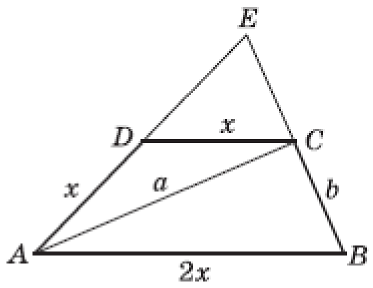
Решение. Пусть ABCD — данная трапеция, AB = 3 и CD = 5 — ее боковые стороны, точки K и M — середины сторон AB и CD соответственно. Пусть, для определенности, AD > BC, тогда площадь трапеции AKMD будет больше площади трапеции KBCM. Так как KM — средняя линия трапеции ABCD, то трапеции AKMD и KBCM имеют равные высоты. Поскольку площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то верно следующее равенство:

$$\frac{S_{AKMD}}{S_{KBCM}} = \frac{AD + KM}{KM + BC} = \frac{11}{5}.$$

Далее, так как в трапецию ABCD можно вписать окружность, то AD + BC = AB + CD = 8. Тогда KM = 4 как средняя линия трапеции ABCD. Пусть BC = x, тогда AD = 8 – x. Имеем:
$$\frac{S_{AKMD}}{S_{KBCM}} = \frac{12 - x}{x + 4} = \frac{11}{5} \Leftrightarrow x = 1.$$
Значит, BC = 1 и AD = 7.

Ответ: 1 и 7.

Задача 7. Основание AB трапеции ABCD вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна *a*, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.



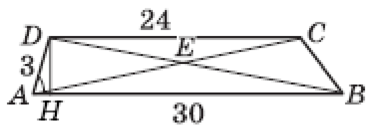
Решение. Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции и CD = x, тогда AD = x, AB = 2x. Отрезок CD параллелен отрезку AB и вдвое его короче, значит, CD является средней линией треугольника ABE. Следовательно, CE = BC = b и DE = AD = x, откуда AE = 2x. Итак, треугольник ABE равнобедренный (AB = AE) и AC — его медиана. Поэтому AC является и высотой этого треугольника, и значит,

$$S_{\Delta\, ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AC = ab.$$

Так как треугольник DEC подобен треугольнику AEB с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$, то $S_{\Delta\, DEC} = \frac{1}{4} S_{\Delta\, AEB} = \frac{ab}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{3ab}{4}$.

Ответ: $\frac{3ab}{4}$.

Задача 8. Диагонали трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника BCE, если длины оснований трапеции AB = 30, DC = 24, боковой стороны AD = 3 и угол DAB равен 60°.



Решение. Пусть DH — высота трапеции. Из треугольника ADH находим, что $DH = 3\sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

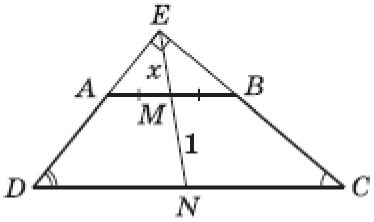
Так как высота треугольника ABC, опущенная из вершины C, равна высоте DH трапеции, имеем: $S_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DH = \frac{45\sqrt{3}}{2}$.

Далее из подобия треугольников ABE и CDE получаем, что $\frac{AE}{CE} = \frac{5}{4}$. Следовательно, $\frac{EC}{AC} = \frac{4}{9}$.

$$\frac{S_{\Delta\, BCE}}{S_{\Delta\, ABC}} = \frac{EC}{AC} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\Delta\, BCE} = 10\sqrt{3}.$$

Ответ: $10\sqrt{3}$.

Задача 9. В трапеции средняя линия равна 4, а углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найти основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.



Решение. Пусть ABCD — данная трапеция, AB и CD — ее основания (AB < CD), M, N — середины AB и CD соответственно. Пусть также ∠ADC = 50°, ∠BCD = 40°. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, поэтому
AB + CD = 8. Продлим боковые стороны DA и CB до пересечения в точке E. Рассмотрим треугольник ABE, в котором ∠EAB = 50°. ∠EBA = 40°,
следовательно, ∠AEB = 90°. Медиана EM этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы: EM = AM. Пусть EM = x, тогда AM = x, DN = 4 – x. Согласно условию задачи MN = 1, следовательно,
EN = x + 1. Из подобия треугольников AEM и DEN имеем:

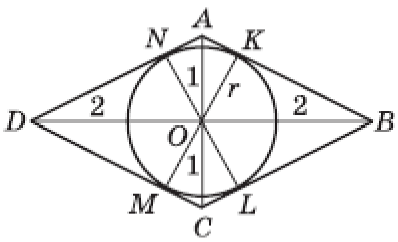
$$\frac{AM}{DN}=\frac{EM}{EN} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4-x}=\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Это означает, что AB = 3 и CD = 5.

Ответ: 3 и 5.

Задача 10. Выпуклый четырехугольник ABCD описан около окружности с центром в точке O, при этом AO = OC = 1, BO = OD = 2. Найти периметр четырехугольника ABCD.



Решение. Пусть K, L, M, N — точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD, DA соответственно, r — радиус окружности. Так как касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то треугольники AKO, BKO, BLO, CLO, CMO, DMO, DNO, ANO — прямоугольные. Применив к этим треугольникам теорему Пифагора, получим, что

$$AN=AK=\sqrt{1-r^2}=CL=CM,$$

$$BK=BL=\sqrt{4-r^2}=DM=DN.$$

Следовательно, AB = BC = CD = DA, то есть ABCD — ромб. Диагонали ромба перпендикулярны друг другу, и точка их пересечения является центром вписанной окружности. Отсюда легко находим, что сторона ромба равна $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, и значит, периметр ромба равен $4\sqrt{5}.$

Ответ: $4\sqrt{5}.$